

УДК 004.423

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ДРУКУВАННІ НА ОСНОВІ ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

М. Ф. Ясінський, Л. М. Ясінська-Дамрі, О. І. Огірко, І. В. Огірко

*Українська академія друкарства,
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна*

В основі дослідження і прогнозування закономірностей поведінки деталей машин та приладів, а також розрахунку елементів інженерних конструкцій лежать математичні моделі механіки суцільного середовища. Побудова та розвиток нових моделей, що враховують конкретний набір властивостей реальних тіл, відноситься до актуальних проблем сучасної механіки. Звичайно, такі моделі дозволяють повніше, порівняно з існуючими, описувати поведінку тіл та розраховувати раціональні режими їх експлуатації. При цьому важливим є узгодження результатів, отриманих різними авторами за різних підходів. До моделей, на основі яких в останні десятиліття проводиться широкий комплекс досліджень, належать моделі механіки. Це зумовлено як практичним використанням у точному приладо- та машинобудуванні плівкових структур, потребами опису різного роду розмірних явищ, у тому числі межі міцності, так і природнім розвитком науки. В рамках нашого підходу, залежність між тензорами напружень і деформацій приймається, у загальному випадку, у вигляді співвідношень за просторовими координатами.

Ключові слова: *моделювання, комп'ютерний експеримент, фізична задача, математичне моделювання, фізико-механічне поле, крайова задача, розв'язок задачі.*

Актуальність теми. Поліграфічна машина – це складна механічна система. Під час проектування елементів поліграфічних машин, друкарських форм, систем кріплення необхідно враховувати процеси їхнього виготовлення, обробки та експлуатації. Складним є математичне моделювання процесу виготовлення та обробки друкарських форм ротаційних машин. У цьому напрямку можна використовувати методи термов'язкопружності. Процес друкування можна моделювати динамічними рівняннями пружності. Процес деформації у друкарських формах моделюють динамічними рівняннями нелінійної пружності. Моделювання можна здійснювати на кількох рівнях складності. Наприклад, деформації, напруження визначають на рівні механіки деформованого твердого тіла. З літературних джерел відомо, що для дослідження друкарських форм успішно використовують методи теорії пружності [2-10]. Відповідні математичні рівняння стану є складною нелінійною системою.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є побудова математичної моделі для вивчення механічних процесів у твердих тілах із врахуванням тензорного характеру. Об'єктом дослідження є пружні тверді тіла, опис поведінки яких потребує врахування ефектів залежності між напруження-

ми і деформаціями. Предметом дослідження є моделювання поведінки таких тіл за різних умов навантаження, розрахунок характеристик, що мають прикладне значення.

Методи дослідження. У роботі використано методи математичного моделювання фізичних процесів, нерівноважної термодинаміки, нелінійної механіки суцільного середовища при побудові моделі.

Тензор напружень— тензор, яким описуються сили, що виникають в твердому тілі при деформації [1-4]. Сили взаємодії виділеного кубика з оточуючими елементами позначені як $T^{(e)}$ і вимірюються в ньютонках. Якщо площа граней виділеного кубика дорівнює S_0 , то введені компоненти напружень σ визначаються як проекції векторів $T^{(e)}/S_0$ на осі декартової системи. Нормальні напруження вважаються додатними, коли вони є розтягувальними, тобто направлені по зовнішній нормалі до площинки. Знак дотичних напружень визначається згідно загальних правил проектування вектора на координатну вісь.

Тензор механічних напружень визначається таким чином, щоб

$$F_i = \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

де F — вектор сили, яка діє на одиницю об'єму речовини.

Тензор механічних напружень симетричний відносно індексів i та k .

Тензор механічних напружень часто записують у вигляді[4-15]

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Діагональні елементи матриці є напруженнями стиску-розтягу, а недіагональні елементи позначаються τ .

У стані механічної рівноваги прикладена зовні сила діє лише на поверхню тіла. Всередині тіла кожен об'єм діє на сусідній з такою ж силою, що й сусідній діє на нього самого. В такому випадку справедливе рівняння рівноваги, що визначає деформацію тіла

$$F_i = \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

У випадку, коли на тіло діють об'ємні сили- рівняння рівноваги набирає вигляду

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho g_i,$$

де ρ — густина речовини, а g_i — компоненти об'ємних сил в розрахунку на одиницю об'єму. Ці рівняння слід розв'язувати разом із граничними умовами [9-15].

Тензор—узагальнює такі поняття як скаляр, вектор, ковектор, лінійний оператор і білінійна форма. В деякому базисі тензор представляється у вигляді багатовимірної таблиці $d \times d \times \dots \times d$ компонентами тензора. Тензор рангу (m, n) над векторним простором V є елемент тензорного добутку m просторів V та n спряжених просторів V^*

$$\tau \in T_n^m(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_m \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_n$$

Сума чисел $m+n$ називається валентністю тензора. Тензор рангу (m, n) також називається m разів контраваріантним та n разів коваріантним.

Основною властивістю тензора $T_{ij\dots}$ є закон перетворення його компонент при зміні системи координат:

$$(1) \quad \hat{T}_{ij\dots}^{kl\dots} = \alpha_{k_1}^k \alpha_{l_1}^l \dots \beta_i^{i_1} \beta_j^{j_1} \dots T_{i_1 j_1 \dots}^{k_1 l_1 \dots}$$

де взаємно обернені матриці переходу α_j^i, β_j^i є частинними похідними функцій, що задають нові координати відносно старих та навпаки:

$$(2) \quad \alpha_j^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}, \quad \beta_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}$$

Тензори допускають такі операції: множення на скаляр — виконується покомпонентно; згортка тензора — специфічна тензорна операція, що знижує ранг тензора. Є такі операції: додавання тензорів однакової валентності і складу індексів — виконується покомпонентно; множення тензорів — добутком тензора рангу (m, n) на тензор рангу (m', n') є тензор рангу $(m+m', n+n')$, тобто якщо $\sigma \in T_n^m$ і $\tau \in T_{n'}^{m'}$ то їх добуток

$$\sigma \otimes \tau \in T_{n+n'}^{m+m'} = T_n^m \otimes T_{n'}^{m'}$$

Тензор рангу $(0, n)$ є функція $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_n)$ з $v_i \in V$, яка лінійна по кожному аргументу v_i , тобто

$$\begin{aligned} \alpha(v_1, \dots, cv_i, \dots, v_n) &= c \cdot \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n), \\ \alpha(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) &= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \alpha(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Довільний тензор рангу (n, m) є функція

$$\alpha(w^1, w^2, \dots, w^n, v_1, v_2, \dots, v_m),$$

де $w^i \in V^*$, $v_i \in V$.

Компонентами i -координатами тензора в базисі віднесення $e_i \in V$, $i = 1, \dots, \dim(V)$ є числа

$$\tau_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m} = \tau(e^{j_1}, e^{j_2}, \dots, e^{j_n}, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m})$$

$$1 \leq i_a, j_b \leq d,$$

де $e^j \in V^*$, $j = 1, \dots, d$ є базис в просторі V^* , дуальний базису e_i . Тобто $e^j e_i = \delta_i^j$, де δ_i^j є символ Кронекера.

Індекси, що відносяться до просторів V^* , зображають верхніми індексами і називають контраваріантними, а індекси, що відносяться до просторів V відповідно зображають знизу і називають коваріантними. В різного роду додатках часто виникають тензори з певною властивістю симетрії. Симетричним по двох індексах називається тензор, який задовольняє такій вимозі:

$$T(\underline{e^{j_1}}, \underline{e^{j_2}}, \dots, \underline{e^{j_n}}, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}) = T(\underline{e^{j_2}}, \underline{e^{j_1}}, \dots, \underline{e^{j_n}}, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m})$$

$$(T(\underline{e^{j_1}}, \underline{e^{j_2}}, \dots, \underline{e^{j_n}}, \underline{e_{i_1}}, \underline{e_{i_2}}, \dots, \underline{e_{i_m}}) = T(\underline{e^{j_1}}, \underline{e^{j_2}}, \dots, \underline{e^{j_n}}, \underline{e_{i_2}}, \underline{e_{i_1}}, \dots, \underline{e_{i_m}}))$$

або в компонентах

$$T_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m} = T_{j_2, j_1, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m},$$

$$\forall j_1, j_2 = 1, 2, \dots, (\dim(V) = \dim(V^*))$$

$$(T_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m} = T_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_2, i_1, \dots, i_m},$$

$$\forall i_1, i_2 = 1, 2, \dots, (\dim(V) = \dim(V^*)))$$

Аналогічно визначається антисиметричність:

$$T(\underline{e^{j_1}}, \underline{e^{j_2}}, \dots, \underline{e^{j_n}}, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}) = -T(\underline{e^{j_2}}, \underline{e^{j_1}}, \dots, \underline{e^{j_n}}, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m})$$

$$(T(\underline{e^{j_1}}, \underline{e^{j_2}}, \dots, \underline{e^{j_n}}, \underline{e_{i_1}}, \underline{e_{i_2}}, \dots, \underline{e_{i_m}}) = -T(\underline{e^{j_1}}, \underline{e^{j_2}}, \dots, \underline{e^{j_n}}, \underline{e_{i_2}}, \underline{e_{i_1}}, \dots, \underline{e_{i_m}}))$$

або в компонентах

$$T_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m} = -T_{j_2, j_1, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m},$$

$$\forall j_1, j_2 = 1, 2, \dots, (\dim(V) = \dim(V^*))$$

$$(T_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m} = -T_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_2, i_1, \dots, i_m},$$

$$\forall i_1, i_2 = 1, 2, \dots, (\dim(V) = \dim(V^*)))$$

Симетрія або антисиметрія не обов'язково повинна охоплювати тільки сусідні індекси, вона може включати і індекси з різних місць тензора. Головною умовою є те, що симетрія або антисиметрія може відноситися тільки до індексів одного сорту.

Тензорне поле — це відображення, яке кожній точці простору ставить у відповідність тензор. Тензорне поле можна визначити кількома способами. Використовуючи основне поняття диференціальної геометрії [1-5] — структура на многовиді, — можна дати наступне визначення:

нехай $V = \mathbb{R}^n$, $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ і $V_q^p = ((\otimes^p V) \otimes ((\otimes^q V^*)))$ — простір тензорів типу (p, q) з природним тензорним представленням групи $GL^1(n) = GL(n)$, тоді структура типу V_q^p є лінійною структурою першу порядку і називається тензорним полем типу (p, q) . При визначенні тензорного поля можна відштовхуватися від поняття тензорного розшарування. Тензорне поле — це перетин тензорного розшарування $T^{p, q}(M)$ на диференційовному многовиді M , ізоморфного в загальному випадку тензорному добутку дотичних та кодотичних розшарувань

$$T^{p, q}(M) \cong \otimes^p T(M) \otimes \otimes^q T(M)^*.$$

Менш формально тензорне поле [1-5] можна розглядати як відображення, яке кожній точці розглянутого многовиду M ставить у відповідність тензор постійної валентності. Поняття тензорного поля виникає в механіці та фізиці суцільних середовищ при описі середовищ. Поняття тензорного поля знаходить застосування у всіх прикладних науках, де такі середовища розглядаються і вивчаються. Поняття розширеного тензорного поля виникає в результаті розширення поняття тензорного поля у викладеному вище сенсі. Тензорне поле — це відображення, яке ставить у відповідність кожній точці x многовиду M деякий тензор фіксованої валентності (p, q) , віднесений до цієї точки x . Нехай тепер \tilde{M} — деякий інший многовид, який є лінійним розшаруванням над M , і нехай $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ — канонічна проекція для такого многовиду. Тоді розширене тензорне поле — це відображення, яке ставить у відповідність кожній точці y у многовиді \tilde{M} деякий тензор фіксованого валентності (p, q) на \tilde{M} віднесений до точки $x = \pi(y)$.

Тензор електромагнітного поля 4-тензор — це математичний об'єкт, який використовується для описання поля в релятивістській фізиці. Рівняння теорії відносності особливо зручно записувати, використовуючи 4-вектори й 4-тензори. Відповідний 4-тензор існує також і для опису електромагнітного поля. При його використанні основні рівняння для електромагнітного поля: рівняння Максвелла й рівняння руху зарядженої частки в полі мають особливо просту й елегантну форму. 4-тензор електромагнітного поля визначається, як похідні від 4-потенціалу:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

4-тензор електромагнітного поля визначається через звичайні тривимірні складові векторів напруженості електричного поля й магнітної індукції так:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Перша форма — це коваріантний тензор, друга форма — контраваріантний тензор.

Записане у 4-векторній формі рівняння руху частки в електромагнітному полі набирає вигляду

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{q}{c} F^{ik} u_k,$$

де u^k — 4-швидкість, q — електричний заряд частки, c — швидкість світла, m — маса спокою. Права частина цього рівняння це сила Лоренца.

Основні рівняння електродинаміки записуються через 4-тензор електромагнітного поля так:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ji}}{\partial x^k} = 0.$$

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i.$$

де j^i — 4-вектор густини електричного струму.

4-тензор — математичний об'єкт, який використовується для опису поля в фізиці, тензор, визначений у чотиривимірному просторі-часі, повороти системи відліку в якому включають як звичні повороти тривимірного простору, так і перехід між системами відліку, які рухаються з різними швидкостями одна щодо іншої.

У загальному випадку 4-тензор є об'єктом із набором індексів:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_m}$$

При зміні системи відліку компоненти цього об'єкта перетворюються за законом

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_m} = \beta_{j_1 k_1} \beta_{j_2 k_2} \dots \beta_{j_m k_m} \alpha_{i_1 l_1} \alpha_{i_2 l_2} \dots \alpha_{i_n l_n} A_{l_1 l_2 \dots l_n}^{k_1 k_2 \dots k_m},$$

де α_{ij} — матриця повороту, β_{ij} — обернена їй.

Верхні індекси називаються контраваріантними, нижні — коваріантними. Сумарне число індексів задає **ранг** тензора. 4-вектор є 4-тензором першого рангу.

У фізиці тензори однакової природи з різним числом коваріантних і контраваріантних індексів вважаються спорідненими. Опущання чи піднімання індекса здійснюється за допомогою метричного тензора \hat{g} , наприклад для 4-тензора другого рангу

$$A^{ij} = g^{jk} A_k^i$$

Відповідний 4-тензор існує також і для опису електромагнітного поля. Це 4-тензор другого рангу. При його використанні основні рівняння для електромагнітного поля: рівняння Максвела й рівняння руху зарядженої частки в полі мають особливо просту й елегантну форму.

4-тензор визначається через похідні від 4-потенціалу:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

4-тензор визначається через звичайні тривимірні складові векторів напруженості так:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Перша форма — це коваріантний тензор, друга форма — контраваріантний тензор.

Записане у 4-векторній формі рівняння руху зарядженої частки в електромагнітному полі набирає вигляду

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{q}{c} F^{ik} u_k,$$

де u^k — 4-швидкість, q — електричний заряд частки, c — швидкість світла, m — маса спокою. Права частина цього рівняння це сила Лоренца.

Тензорний аналіз [1-7]—розділ тензорного числення, що вивчає диференційні оператори, котрі діють на алгебрі тензорних полів $D(M)$, що диференціюється M . Розглядаються також оператори, що діють на загальніші, ніж тензорні поля, геометричні об'єкти: тензорна густина, диференціальні форми зі значеннями у векторному розшаруванні і т.д.

Найбільший інтерес представляють оператори, дія яких не виводить за межі алгебри $D(M)$.

1) *Коваріантна похідна* уздовж векторного поля X — лінійне відображення ∇_X простору векторних полів $D^1(M)$ від M , залежне від векторного поля X і яке задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} \nabla_f X + g_V Z &= f \nabla_X Z, \\ \nabla_X (fZ) &= f \nabla_X Z + (Xf)Y, \end{aligned}$$

де $X, Y, Z \in D(M)$, f, g — гладкі функції на M . Зв'язність Γ і паралельне перенесення, що визначаються цим оператором, дозволяють розповсюдити дію коваріантної похідної до лінійного відображення алгебри $D(M)$ в себе; при цьому

відображення ∇_X є диференціювання, зберігає тип тензорного поля і перестановочне зі згорткою. В локальних координатах $u^1, u^2 \dots u^n$ коваріантна похідна тензора з компонентами $T(T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_l})$ щодо вектора $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ визначається так:

$$\nabla_X T = \xi^s \left(\frac{\partial T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_l}}{\partial u^s} + \Gamma_{k_s}^{i_1} T_{j_1 \dots j_m}^{k \dots i_l} + \dots - \Gamma_{j_i, s}^k T_{k \dots j_m}^{i_1 \dots i_l} \right),$$

$\Gamma_{k_s}^i$ — об'єкт зв'язності Γ .

2) *Похідна Лі* уздовж векторного поля X — відображення L_X простору $D'(M)$, що визначене формулою $L_X : Y \rightarrow [X, Y]$, де $[X, Y]$ — комутатор векторних полів X, Y . Цей оператор також однозначно продовжується до диференціювання $D(M)$, зберігає тип тензорів і переставляється зі згорткою. В локальних координатах Лі похідна тензора $T(T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_l})$ виражається так:

$$\nabla_X T = \xi^s \left(\frac{\partial T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_l}}{\partial u^s} + \Gamma_{k_s}^{i_1} T_{j_1 \dots j_m}^{k \dots i_l} + \dots - \Gamma_{j_i, s}^k T_{k \dots j_m}^{i_1 \dots i_l} \right),$$

3) Зовнішній диференціал — лінійний оператор d , що зiставляє зовнішній диференційній формі (кососиметричному коваріантному тензору) степеня p форму такого ж вигляду і степеня $p+1$, котра задовольняє умовам:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2, \quad d(dw) = 0,$$

де \wedge — символ зовнішнього добутку r — ступінь ω_1 . В локальних координатах зовнішня похідна тензора $\omega(\omega_{i_1 \dots i_p})$ виражається так:

$$d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial \omega_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}}}{\partial u^{i_k}}.$$

4) *Тензор кривизни* симетричного невідродженого двічі коваріантного тензора \mathcal{G}_{if} є дією деякого нелінійного оператора R :

$$g_{if} \rightarrow R_{mkl}^s = \frac{\partial \Gamma_{km}^s}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^s}{\partial u^m} + \sum_p (\Gamma_{lp}^s \Gamma_{km}^p - \Gamma_{mp}^s \Gamma_{kl}^p),$$

де

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^s} \right).$$

Деформація — зміна розмірів і форми твердого тіла під дією зовнішніх сил або якихось інших впливів - температури, електричних чи магнітних полів. При деформації точки твердого тіла змінюють своє положення. Точка із радіус-вектором r при деформації має нове положення r' , тобто здійснить переміщення $u = r' - r$. Поле переміщень є однією з характеристик деформації. Деформацію математично найзручніше описувати похідними від переміщення, які утворюють тензор, що отримав назву тензора деформації.

Для довільного тіла, що зазнає довільного деформування значення лінійних деформацій може відрізнятися у залежності від напрямку, у якому вони розглядаються. У цьому випадку лінійні деформації розглядаються в проєкціях на осі декартових координат. Тоді деформація відрізка AB , що лежить на осі x і точка B яка після деформації переміститься у т. B' запишеться як:

$$\varepsilon_x = \lim_{B \rightarrow A} \frac{|AB'| - |AB|}{|AB|}$$

Провівши подібний аналіз для осей y і z можна отримати відповідно ε_y і ε_z .

Маючи дане поле переміщень \vec{u} можна записати у загальному лінійні деформації як:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Аналогічно оцінюється деформація зсуву у безпосередньому околі точки. Кутова деформація γ є границею зміни кута між двома довільно обраними відрізками в тілі при прикладенні навантаження, коли довжини цих відрізків прямують до нуля. Маючи дане поле переміщень як і вище можна записати:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

Хоча деформації лінійні ε і кутові γ повністю описують деформований стан тіла, є інколи доцільним характеризувати інші види деформацій, як, наприклад, *об'ємна деформація*, що виступає як міра зміни об'єму тіла. З визначення об'ємна деформація то:

$$\vartheta = \lim_{V^{(0)} \rightarrow 0} \frac{V - V^{(0)}}{V^{(0)}}$$

де: $V^{(0)}$ — початковий об'єм, V — кінцеве значення об'єму.

В декартовій системі координат:

$$\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Тензорний запис деформації

Використовуючи єдині позначення для обох типів деформації можна записати деформації у вигляді тензора деформації [1-8]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i),$$

або у тензорному виді:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^T)$$

З порівняння тензорного запису з тардиційним для декартової системи координат можна отримати:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Об'ємна деформація : $\vartheta = \varepsilon_{ij}g^{ij}$,

де: g^{ij} — контраваріантний метричний тензор.

Найпоширеніші види деформації, котрі розглядаються опором матеріалів є згин, зсув, кручення, розтяг-стиск.

У залежності від поведінки тіла після зняття навантаження розрізняють деформації: *пружну*, якщо тіло після усунення впливів, що спричинили деформацію, повністю відновлює свою початкову форму і розміри; *залишкову*, коли після усунення прикладених сил або інших впливів тіло не відновлює свою початкову форму і розміри. Залишкові деформації у свою чергу поділяються на *пластичні*, викликані зростанням напруження і *в'язкі*, що відбуваються під навантаженням з перебігом часу.

Пружні деформації однозначно пов'язані з напруженням. Прирощення пластичних деформацій також пов'язано зі зміною напруження, але неповоротно. Температурні деформації пов'язані зі зміною температури тіла. Деформації повзучості пов'язані з прирощенням часу. У кристалах пружна деформація проявляється в зміні відстаней між вузлами і перекосі кристалічної решітки без зміни порядку розташування атомів; і початкова конфігурація відновлюється при знятті навантаження. Одним з механізмів пластичного деформування в кристалі є рух і розмноження дислокацій. При напруженні вищому за границю пружності рух дислокацій викликає безповоротну перебудову кристалічної структури, тобто деформація стає пластичною. У полікристалічному матеріалі, яким є метали, як правило, одна частина зерен деформується пружно, інша — пластично. При цьому в макромасштабі необоротна деформація може виявитися суттєво малою і тіло вважається пружним, але її наявність проявляється в пружному гістерезисі. Для виникнення руху і розмноження дислокацій вимагається певний час. З цим пов'язана динамічна чутливість матеріалу до появи залишкових деформацій. Якщо напруження, що перевищує границю пружності, діє короткочасно, то рух і розмноження дислокацій не встигає розвинутися то пластична деформація не виникає. Деформація повзучості пов'язана з рухом дислокацій, дифузією втілених атомів, перебудовою міжзеренних зв'язків і проявляється з плином часу.

У полімерах деформація визначається зміною конфігурації довгих полімерних ланцюгів та поперечних зв'язків між ними. Наявність далеких взаємодій обумовлює протяжність у часі розвитку деформацій. Для полімерів типовою є в'язкопружна деформація.

При малих деформаціях напруження зростає лінійно із видовженням. Якщо зняти прикладену силу, то тіло повертає свої розміри й форму. При зростанні деформації реакція тіла втрачає лінійність, а ще при більшій деформації починається **область пластичності**. При такій деформації тіло вже не повертає собі попередні розміри й форму. В цій області проявляється явище повзучості — зміни розмірів тіла з часом при незмінній силі розтягу. В цій області тіло сильно розтягається при незначному збільшенні прикладеної сили. При певній деформації настає руйнування [7-8]. В залежності від величини області пластичної деформації матеріали поділяються на пластичні й крихкі. У крихких матеріалів область пластичної деформації дуже вузька. Крихкість речовин сильно залежить від температури. При низьких температурах тіла схильні руйнуватися при менших навантаженнях. Особливо це стосується полімерних матеріалів, які при високих температурах надзвичайно пластичні, а на морозі легко ламаються..

Іншими характеристиками реакції матеріалів на деформацію є міцність і твердість. **Напруження**— міра інтенсивності внутрішніх сил, розподілених по перетинах, тобто зусилля, що припадають на одиницю площі перетину тіла. При вирішенні питання про міцність конструкції недостатньо знати тільки систему сил, що діють на цю конструкцію. Необхідно знати ще її розміри та матеріал, з якого вона зроблена. Напруження в загальному — це відношення сили, що діє по площадці до величини площі цієї площадки.

Причинами виникнення напружень є дія зовнішніх сил, температурних полів [9-18] чи проходження у матеріалі тіла фізико-хімічних процесів.

Для визначення напружень у довільному перерізі, проведеному через довільну точку тіла, застосовуємо метод перерізів. Через задану точку P (рис. 1), у якій треба визначити напруження, проведемо уявну січну площину, яка розділяє тіло на дві частини. Відкидаємо праву частину тіла і виділяємо навколо точки P елементарну площинку ΔS . При деформуванні твердих тіл через наявність внутрішніх зв'язків у матеріалі виникають внутрішні силові фактори, котрі можна формально охарактеризувати величиною зусилля, що припадає на одиницю площі. Інтенсивність цих внутрішніх сил у певній точці називають *механічним напруженням* : σ , яке можна визначити як границю відношення зусилля ΔF до площі ΔS , коли ця площа стягується до крапки (рис. 1).

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Коли говорити про напруження в точці, слід вказувати його напрям, який у загальному випадку не збігається з напрямком зовнішньої нормалі до площинки. За напрям напруження приймається напрям рівнодійної ΔF . Напруження в точці є величиною векторною (рис. 2).

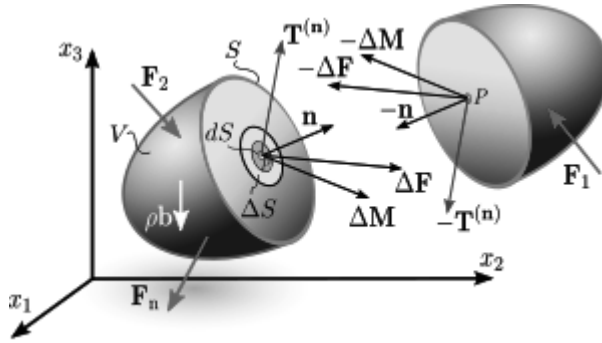


Рис. 1 Силкові фактори, що виникають з умов рівноваги на елементарній площинці твердого тіла під впливом зовнішніх навантажень F_i

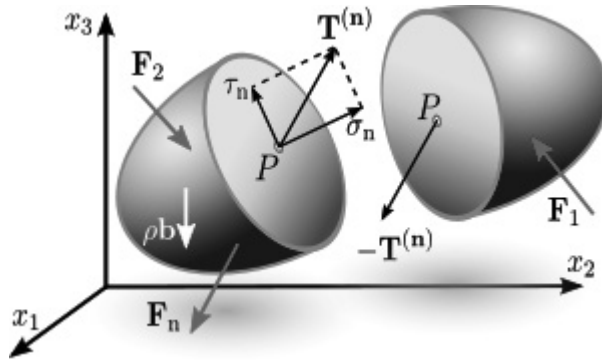


Рис. 2 Механічне напруження на площинці ΔS під впливом зовнішніх силкових факторів F_i

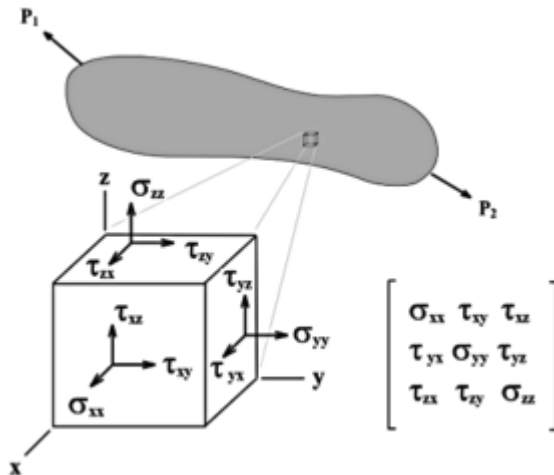


Рис. 3 Повний тензор механічного напруження елементарного паралелепіпеда

Для випадку кінцевої площі, середнє напруження σ на площі S можна знайти за формулою:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

F — сила, що виникає в тілі при деформації;

S — площа перетину.

Розрізняють два види компонент вектора механічного напруження:

- *нормальне механічне напруження* (напруження розтягу-стиску) — прикладене на одиничну площинку перерізу зразка, по нормалі до перерізу (позначається σ).
- *дотичне механічне напруження* — прикладене на одиничну площинку перерізу зразка, у площині перерізу (позначається τ).

Нормальне напруження зумовлює відрив частинок однієї від іншої в умовах розтягу. Дотичне напруження відповідно зумовлює їх взаємний зсув. Напруження, якими оперують за результатами механічних випробувань, можуть бути істинними й умовними. Відомо, що в процесі деформації величина площини, на якій діють напруження, змінюється. Якщо ці зміни не враховують і напруження розглядають як відношення навантаження в даний момент до вихідної площі перерізу (S_0), то їх називають *умовними напруженнями*. Якщо ж відносять силу до величини фактичного перерізу в даний момент деформування, то одержують *істинне напруження*. Фізичний зміст мають лише істинні напруження, проте на практиці часто буває зручніше користуватись умовними. Це особливо виправдано при малих деформаціях, коли зміна площі перерізу зразка є незначною.

Тензор механічних напружень

Якщо окіл точки P (рис.2) обмежити шістьма взаємно перпендикулярними площинами і отриманий елементарний паралелепіпед зорієнтувати ребрами паралельно осям декартових координат, то на кожній із граней паралелепіпеда будуть діяти відповідні напруження. Повні напруження у площинах xu , xz та uz можна розкласти по напрямках, паралельних до осей декартових координат (рис.3). Отримані дев'ять компонентів напружень повністю визначають напружений стан і утворюють *тензор механічних напружень* -тензор напружень Коші.

$$\sigma = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{e}_1) \\ \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{T}(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

де

σ_{11} , σ_{22} , і σ_{33} —це нормальні напруження, а

σ_{12} , σ_{13} , σ_{21} , σ_{23} , σ_{31} , і σ_{32} є дотичними напруженнями.

У загальному випадку напружений стан [6-15] характеризується тензором механічних напружень, а стан, відмінний від одновісного розтягування-стискування — складним напруженим станом.

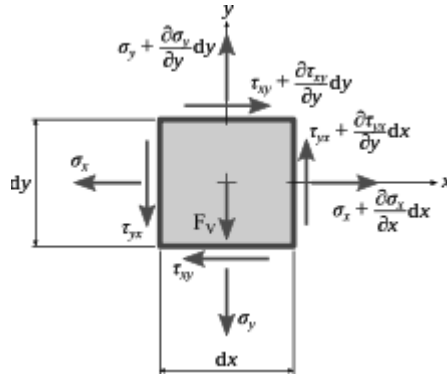


Рис. 4 Рівновага виділеного паралелепіеда у площині xOy

На двох довільних взаємно перпендикулярних площинах, дотичні напруження, які перпендикулярні до лінії перетину площин, рівні за величиною і протилежні за знаком

$$(\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{zy} = \tau_{yz}, \tau_{zx} = \tau_{xz}).$$

Розглянемо рівняння рівноваги виділеного елементарного паралелепіеда у вигляді суми моментів сил відносно осей координат, що повинні дорівнювати нулю. Запишемо рівняння суми моментів сил відносно осі Oz (рис. 4):

$$\begin{aligned} \sum M(z) = \tau_{yx} dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{xy} dx dz \frac{dy}{2} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dy dz \frac{dx}{2} - \\ - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dx dz \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

Моменти відносно осі Oz від нормальних сил відсутні. Із записаного рівняння випливає

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

За аналогією для двох інших осей Ox та Oy:

$$\begin{aligned} \sum M(x) = 0 \Rightarrow \tau_{zy} = \tau_{yz} \\ \sum M(y) = 0 \Rightarrow \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{aligned}$$

При зміні напрямку координатних осей напруження на гранях елементарного паралелепіеда змінюються. Доведено, що можна завжди знайти таке положення паралелепіеда, коли на його гранях $\tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$.

Головні напруження [2-10] позначаються: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ при цьому повинно виконуватись правило $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Деякі з головних напружень можуть дорівнювати нулю. В залежності від кількості відмінних від нуля головних напружень розрізняють наступні види напруженого стану: *лінійний; плоский; об'ємний*.

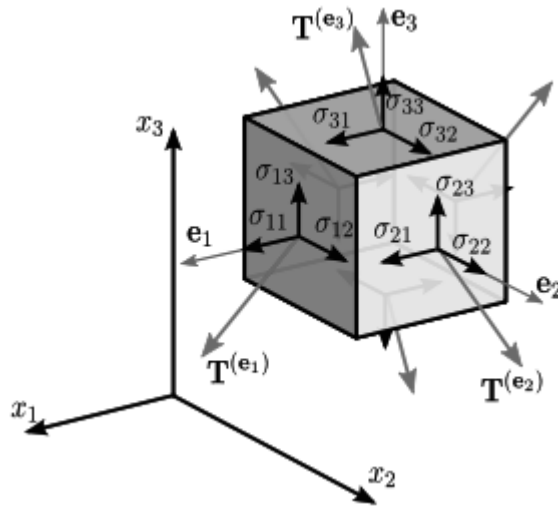


Рис. 5 Компоненти тензора механічних напружень

Тензор пружності - тензор четвертого рангу C_{iklm} , який зв'язує між собою тензор механічних напружень σ_{iki} і тензор деформації ϵ_{lm} в законі Гука

$$\sigma_{ik} = \sum_{lm} C_{iklm} \epsilon_{lm}.$$

Загалом тензор четвертого рангу має 81 компоненту. Однак, кількість незалежних компонент зменшується завдяки симетричності тензора пружності. Тензор пружності симетричний відносно перестановки перших двох індексів завдяки симетричності тензора механічних напружень

$$C_{iklm} = C_{kilm}.$$

Тензор пружності симетричний відносно перестановки останніх двох індексів завдяки симетричності тензора деформації

$$C_{iklm} = C_{ikml}.$$

Тензор пружності симетричний також відносно переставлення пар індексів

$$C_{iklm} = C_{tmik}.$$

Таким чином максимальне число незалежних компонентів дорівнює 21.

Симетрія середовища накладає додаткові умови симетрії. Наприклад, для ізотропного середовища кількість незалежних компонентів дорівнює двом: це модуль Юнга й модуль зсуву.

Висновок. Результати роботи можуть стати основою для розрахунку деталей машин та елементів конструкцій [7-18], що працюють у різних умовах, у випадку, коли необхідно враховувати поверхневі ефекти. Отримані результати мають загальний характер і їх можна використати при подальших теоретичних дослідженнях, зокрема при побудові нових моделей деформівних твердих тіл.

Список використаних джерел

1. Опір матеріалів. Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. За ред. Г. С. Писаренка — К.: Вища школа, 1993. — 655 с. ISBN 5-11-004083-5
2. Опір матеріалів: Навч. посіб. для студентів ВНЗ. Рекомендовано МОН / Шваб'юк В. І. — К., 2009. — 380 с.
3. Мильніков О. В. Опір матеріалів. Конспект лекцій / Олександр Володимирович Мильніков. — Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. — 257 с.
4. Bishop, Richard L.; Samuel I. Goldberg (1980) [1968]. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover. ISBN 978-0-486-64039-6.
5. Lebedev, Leonid P.; Michael J. Cloud (2003). *Tensor Analysis*. World Scientific. ISBN 978-981-238-360-0.
6. Kay, David C (1988-04-01). *Schaum's Outline of Tensor Calculus*. McGraw-Hill. ISBN 978-0070334847.
7. Synge JL, Schild A (1978-07-01). *Tensor Calculus*. Dover Publications. ISBN 978-0486636122.
8. Разумова М. А., Хотяїнцев В. М. Основи векторного і тензорного аналізу: навчальний посібник. — Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. — 216 с.
9. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пружності. — Львів: Світ, 1994. — 560 с. — ISBN 5-7773-0109-6
10. Бурак Я. І., Огірко І. В. Оптимальний нагрів циліндричної оболонки з залежними від температури характеристиками матеріалу // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. — 1977. — Вип. 5. — С.26-30
11. Огірко І. В. Оптимальне по напрузі температурне поле в локальній області гнучкої конструкції // *Інститут проблем міцності*, 1986, N2. — С.69-72.
12. Ogirko I.V., Irkha B.E. A study of the elastic deformations in a thermoelastic inhomogeneous solid of revolution // *Journal of Mathematical Sciences*. Volume 79, Issue 6, 1996, Pages 1469–1471.
13. Ogirko I.V., Zapotochnyi V.I. The stress-strain state of screen photopolymer plates // *Soviet Materials Science* 22 (6), 1987, pp. 640–643.
14. Ogirko I.V. Temperature field, optimum with regard to stresses, in a local region of a flexible structure // *Strength of Materials* 18 (2), 1986, pp. 209–213.
15. Ogirko I.V. Stress-Optimal Temperature Field in the Local Region of a Flexible Structure // *Problemy Prochnosti* (2), 1986, pp. 69–72.
16. Огірко И. В. Напряженно-деформированное состояние фотополимерных печатных форм / Я. И. Дуб, И. В. Огірко, М. Ф. Ясинский. — Львов : Изд-во ФМИ, 1987. 70с.
17. Огірко И. В. Оптимизация деформации печатных форм на основе теории оболочек / Р. С. Куропась, И. В. Огірко. — Львов : Выща школа. Изд-во при Львов. гос. ун-те, 1987. 160 с.
18. Огірко І. В. Математичне моделювання друкарських форм ротаційних машин/ Я. І. Дуб, І. В. Огірко, М. Ф. Ясинський. — Львів .Вища школа. Вид-во при Львів. ун-т, 1987. 250с.

REFERENCES

1. Opir materialiv. Pidruchnyk (1993)/H. S. Pysarenko, O. L. Kvitka, E. S. Umanskyi. Za red. H. S. Pysarenka — K.: Vyshcha shkola - 655 s. ISBN 5-11-004083-5 (in Ukrainian)
2. Opir materialiv: Navch. posib. dlia studentiv VNZ. (2009). Rekomendovano MON / Shvabiuk V. I. — K. — 380 s. (in Ukrainian)
3. Mylnikov O. V. (2010). Opir materialiv. Konspekt lektsii / Oleksandr Volodymyrovych Mylnikov. — Ternopil: Vydavnytstvo TNTU – 257 s. (in Ukrainian)
4. Bishop, Richard L.; Samuel I. Goldberg (1980). [1968]. Tensor Analysis on Manifolds. Dover. ISBN 978-0-486-64039-6. (in English)
5. Lebedev, Leonid P.; Michael J. Cloud (2003). Tensor Analysis. World Scientific. ISBN 978-981-238-360-0. (in English)
6. Kay, David C (1988-04-01). Schaum's Outline of Tensor Calculus. McGraw-Hill. ISBN 978-0070334847. (in English)
7. Synge JL, Schild A (1978-07-01). Tensor Calculus. Dover Publications. ISBN 978-0486636122. (in English)
8. Razumova M. A., Khotiaintsev V. M. (2011). Osnovy vektornoho i tenzornoho analizu: navchalnyi posibnyk. — Kyiv: VPTs «Kyivskiy universytet».—216s. (in Ukrainian)
9. Bozhydarnyk V. V., Sulym H. T. (1994). Elementy teorii pruzhnosti. — Lviv: Svit—560s. — ISBN 5-7773-0109-6 (in Ukrainian)
10. Burak Ya. I., Ohirko I. V. (1977). Optymalnyi nahriv tsylindrychnoi obolonky z zalezhnymy vid temperatury kharakterystykamy materialu // Mat. metody i fiz.-mekh. polia. —Vyp. 5. — S.26-30 (in Ukrainian)
11. Ohirko I. V. (1986). Optymalne po napruzi temperaturene pole v lokalnii oblasti hnuchkoi konstruktсии // Instytut problem mitsnosti, N2. — C.69-72. (in Ukrainian)
12. Ogirko I.V., Irkha B.E. (1996). A study of the elastic deformations in a thermoelastic inhomogeneous solid of revolution // Journal of Mathematical Sciences. Volume 79, Issue 6, Pages 1469–1471. (in English)
13. Ogirko I.V., Zapotochnyi V.I. (1987). The stress-strain state of screen photopolymer plates // Soviet Materials Science 22 (6), pp. 640–643. (in English)
14. Ogirko I.V. (1986). Temperature field, optimum with regard to stresses, in a local region of a flexible structure // Strength of Materials 18 (2), pp. 209–213. (in English)
15. Ogirko I.V. (1986). Stress-Optimal Temperature Field in the Local Region of a Flexible Structure // Problemy Prochnosti (2), pp. 69–72. (in English)
16. Ogirko I. V. (1987). Naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie fotopolimernyh pechatnyh form / Ja. I. Dub, I. V. Ogirko, M. F. Yasinskij. — L'vov : Izd-vo FMI, 70c. (in Russian)
17. Ogirko I. V. (1987). Optimizacija deformacii pechatnyh form na osnove teorii obolochek / R. S. Kuropas', I. V. Ogirko. — L'vov : Vyshha shkola. Izd-vo pri L'vov. gos. un-te, 160 c. (in Russian)
18. Ohirko I. V. (1987). Matematychno modeliuвання drukarskykh form rotatsiinykh mashyn/ Ya. I. Dub, I. V. Ohirko, M. F. Yasynskiy. — Lviv .Vyshcha shkola. Vyd-vo pry Lviv. un-t, 250c. (in Ukrainian)

DOI 10.32403/2411-9210-2021-1-45-131-148

MATHEMATICAL MODELLING OF ELASTIC PROCESSES IN PRINTING BASED ON TENSOR ANALYSIS

M.F. Yasinskyi, L.M. Yasinska-Damry, O.I. Ohirko, I.V. Ohirko

*Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
ogirko@gmail.com*

The basis of research and forecasting of behavior patterns of machines and devices, as well as the calculation of elements of engineering structures are mathematical models of solid environment mechanics. The construction and development of new models that take into account a specific set of properties of real bodies is one of the current problems of modern mechanics. Indeed, such models make it possible to describe the behavior of bodies more fully than the existing ones and to calculate rational modes of their operation. It is important to coordinate the results obtained by different authors with different approaches. Models on the basis of which a wide range of research has been conducted in recent decades include models of mechanics. This is due to both the practical use in precision instrumentation and mechanical engineering of film structures, the need to describe various dimensional phenomena, including strength limits, and the natural development of science. In our approach, the dependency between stress and strain tensors is taken in the form of relations in spatial coordinates in the general case.

Keywords: *modelling, computer experiment, physical problem, mathematical modelling, physical-mechanical field, boundary value problem, problem solution.*

Стаття надійшла до редакції 04.02.2021

Received 04.02.2021