

УДК 538.30

МОДЕЛЮВАННЯ І АНАЛІЗ РОЗПОДІЛУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ У МАГНІТОТВЕРДОМУ ШАРІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ ЗА УМОВ ОДНОЧАСНОЇ ДІЇ ГАРМОНІЙНОГО ЗА ЧАСОМ ТА ПОСТІЙНОГО МАГНІТНОГО ПОЛІВ

Я.М. Пелех, Я.М. Глинський, І.В. Кунинець, С.М. Ментинський

*Національний університет «Львівська політехніка»
вул.С. Бандери, 12, Львів, 790013, Україна*

Побудовано математичну модель і проведено розрахунок розподілу магнітного поля у магнітотвердому шарі, що знаходиться за умов одночасної дії гармонійного за часом та постійного магнітного полів. Задача розв'язується двома способами: за допомогою методу малого параметру, а також з використанням нелінійних обчислювальних формул. Запропоновано розрахункові формули, що дозволяють у кожній вузловій точці лише за чотири звертання до правої частини диференційного рівняння отримати метод четвертого порядку точності, а також два двосторонні наближення третього порядку точності.

Ключові слова. *Магнітне поле, магнітотвердий шар, рівняння електродинаміки, індукція, напруженість, задача Коші, неперервні дроби, нелінійні чисельні методи, двосторонні наближення.*

Вступ. Математичне моделювання є одним із сучасних наукових методів дослідження прикладних задач і у багатьох важливих випадках дозволяє замінити реальний процес, а також отримати як якісну, так і кількісну характеристику модельованого процесу.

При розрахунку напружено-деформівного стану тонкостінних елементів конструкцій (стержнів, пластин, оболонок), а також задач гідроакустики, кінетики, електроніки, і т.д., виникає потреба знаходити не тільки наближені розв'язки досліджуваних математичних моделей, але й гарантовану оцінку похибки.

Одним з ефективних способів побудови таких наближень є ланцюгові (неперервні) дроби. Процес їх обчислень є циклічним і легко програмується на ПК.

Формулювання задачі. Розглянемо електропровідний шар із магнітотвердого матеріалу товщиною l . Шар знаходиться під впливом зовнішнього магнітного поля, коли на поверхнях $Z = 0$ і $Z = 1$ задано дотичну складову напруженості магнітного поля

$$H_y(0;t) = H_y(l;t) = H_0 + H_1 \cos \omega t, \quad (1)$$

де $\omega = 2\pi\nu$, ν - частота, H_0 і H_1 - відповідно стала складова та амплітуда гармонійної складової напруженості магнітного поля.

Із рівнянь електродинаміки для області шару отримаємо рівняння [2-4]:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \lambda^2 \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (2)$$

яке пов'язує складові $H_y \equiv H(z;t)$ напруженості магнітного поля і $B_y \equiv B(z;t)$ магнітної індукції.

Для магнітотвердих матеріалів залежність між індукцією B та напруженістю H магнітного поля має вигляд [2-4]:

$$B = \beta \cdot \arctg(\alpha H), \quad H = \sqrt{1 - \chi^2} H - \chi \omega^{-1} \dot{H}. \quad (3)$$

Тут $\beta = 2B_S / \pi$, $\alpha = \pi(\mu - 1)\mu_0 / (2B_S)$, $\chi = H_c / H_m$ при $H < H_m$ і $\chi = H_c / H_0$ при $H > H_m$; H_0 і H_m – напруженість магнітного поля на поверхні тіла та відповідна гістерезисному насиченню; H_c – коерцитивна сила; B_S – індукція насичення, μ – початкова відносна магнітна проникність середовища, μ_0 – магнітна стала, λ – електропровідність. Крапка над величиною означає частинну похідну за часом.

Методика розв'язання задачі електродинаміки. Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо двома способами: у вигляді ряду за малим параметром $\varepsilon_* = H_1 / H_0$ ($H_1 < H_0$), а також із використанням двосторонніх розрахункових формул.

Метод малого параметру

Ввівши безрозмірний параметр ε_* , який характеризує відношення величини амплітуди гармонійної складової напруженості магнітного поля до сталої складової $\varepsilon_* = H_1 / H_0$ (тоді $\varepsilon_* < 1$), умова (1) набуває вигляду

$$H(0;t) = H(1;t) = H_0(1 + \varepsilon_* \cos \omega t).$$

Розв'язок нелінійної задачі електродинаміки (1)-(3) шукаємо у вигляді ряду за малим параметром ε_* :

$$H(z;t) = H_0 [1 + \varepsilon_* h_{(1)}(z;t) + \varepsilon_*^2 h_{(2)}(z;t) + \dots]. \quad (4)$$

Підставляючи (4) у формули (3), для функцій H і B отримаємо наступні розклади

$$\begin{aligned} H(z;t) &= H_0 [h_0 + \varepsilon_* h_{(1)} + \varepsilon_*^2 h_{(2)} + \dots], \\ B(z;t) &= \mu_0 H_0 [b_0 + \varepsilon_* b_{(1)} + \varepsilon_*^2 b_{(2)} + \dots], \end{aligned} \quad (5)$$

де $h_0 = \sqrt{1 - \chi^2}$, $h_{(i)} = \sqrt{1 - \chi^2} h_{(i)} - \chi \omega^{-1} \dot{h}_{(i)}$, $i = 1, 2$; $b_0 = \sqrt{1 - \chi^2} + \frac{\mu - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctg \sqrt{\varepsilon \chi}$,

$$b_{(1)} = \mu_\varepsilon h_{(1)}, \quad b_{(2)} = \mu_\varepsilon h_{(2)} - \mu_{1\varepsilon} h_{(1)}^2;$$

$$\mu_\varepsilon = 1 + \frac{\mu - 1}{1 + \varepsilon_\chi}, \quad \mu_{1\varepsilon} = (\mu - 1) \frac{\sqrt{\varepsilon \chi}}{(1 + \varepsilon_\chi)^2}, \quad \varepsilon_\chi = (1 - \chi^2) \varepsilon, \quad \varepsilon = (\alpha H_0)^2. \quad (6)$$

Перейдемо до часових представлень розв'язків $h_{(0)}$, $h_{(1)}$, $h_{(2)}$. Підставляючи розвинення (5) у вихідні співвідношення (1) – (3), а також враховуючи при

цьому (6), отримаємо систему рівнянь для знаходження магнітного поля в першому та другому наближеннях

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h_{(1)}}{\partial z^2} &= \lambda \mu_0 \mu_\varepsilon l^2 \frac{\partial h_{(1)}}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 h_{(2)}}{\partial z^2} &= \lambda \mu_0 l^2 \frac{\partial}{\partial t} [\mu_\varepsilon h_{(2)} - \mu_{1\varepsilon} h_{(1)}^2]\end{aligned}\quad (7)$$

при граничних умовах:

$$h_{(0)}(0) = h_{(0)}(1); \quad h_{(1)}(0;t) = h_{(1)}(1;t) = \cos \omega t; \quad h_{(2)}(0;t) = h_{(2)}(1;t) = 0. \quad (8)$$

Розв'язки задачі (7)-(8) представимо у вигляді

$$\begin{aligned}h_{(1)}(z;t) &= [h_1(z)e^{i\omega t} + \hat{h}_1(z)e^{-i\omega t}] / 2; \\ h_{(2)}(z;t) &= h_2(z)e^{2i\omega t} + \hat{h}_2(z)e^{-2i\omega t}.\end{aligned}\quad (9)$$

Тоді для функцій h_1 і h_2 отримаємо такі задачі:

а) в першому наближенні

$$\frac{d^2 h_1}{dz^2} - 2i(\sqrt{1-\chi^2} - i\chi)\gamma_\varepsilon^2 h_1 = 0; \quad h_1(0) = h_1(1) = 1, \quad (10)$$

б) в другому наближенні

$$\frac{d^2 h_2}{dz^2} - 4i(\sqrt{1-\chi^2} - 2i\chi)\gamma_\varepsilon^2 h_2 = -i(\sqrt{1-\chi^2} - i\chi)^2 \gamma^2 \mu_{1\varepsilon} h_1^2; \quad h_2(0) = h_2(1) = 0. \quad (11)$$

Розв'язком задачі (10) буде функція

$$h_1(z) = \frac{\text{ch}(\sqrt{1+\chi} + i\sqrt{1-\chi})\gamma_\varepsilon(z-1/2)}{\text{ch}(\sqrt{1+\chi} + i\sqrt{1-\chi})\gamma_\varepsilon/2}. \quad (12)$$

Враховуючи конкретний вираз (12) для функції $h_1(z)$, розв'язок задачі (11) представимо таким чином

$$h_2(z) = P(z)/Q(z),$$

де $P(z) = (\sqrt{1-\chi^2} - i\chi)^2 \mu_{1\varepsilon} h_\chi(z),$

$$Q(z) = 4(1-3\chi^2)\sqrt{1-\chi^2} \mu_\varepsilon \text{ch}^2(\sqrt{1+\chi} + i\sqrt{1-\chi})\frac{\chi_\varepsilon}{2} \times \text{ch}\frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_1 + i\chi_2)\chi_\varepsilon, \quad (13)$$

$$h_\chi(z) = s_\chi(0) \cdot \text{ch}\sqrt{2}(\chi_1 + i\chi_2)\gamma_\varepsilon(z-1/2) - \text{ch}\sqrt{2}(\chi_1 + i\chi_2)\gamma_\varepsilon/2 \cdot s_\chi(z),$$

$$s_\chi(z) = (1+3\chi^2)\text{sh}^2(\sqrt{1+\chi} + i\sqrt{1-\chi})\gamma_\varepsilon(z-1/2) + \chi(2\chi - i\sqrt{1-\chi^2})$$

$$\chi_1 = \sqrt{\sqrt{1+3\chi^2} + 2\chi}, \quad \chi_2 = \sqrt{\sqrt{1+3\chi^2} - 2\chi}.$$

Тоді для амплітуд першої та другої гармонік напруженості магнітного поля отримаємо наступні формули

$$A_{h_1}(z) = H_1 \sqrt{v_1(z)/v_1(0)}, \quad A_{h_2}(z) = \frac{H_1 \varepsilon_* \mu_{1\varepsilon} \sqrt{\mathcal{G}_2(z)}}{2\sqrt{1-\chi^2} (1+3\chi^2) \mu_\varepsilon v_1(0) \sqrt{v_3(0)}}. \quad (14)$$

Тут

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(z) &= (1+3\chi^2) [v_3(0)v_7(z) + v_7(0)v_3(z)] - [v_4(0)v_4(z) + v_5(0)v_5(z)], \\ v_1(z) &= \operatorname{ch} \sqrt{1+\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1) + \cos \sqrt{1-\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1), \\ v_2(z) &= \operatorname{ch} \sqrt{1+\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1) - \cos \sqrt{1-\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1), \\ v_3(z) &= \operatorname{ch} \sqrt{2} \chi_1 \gamma_\varepsilon (2z-1) + \cos \sqrt{2} \chi_2 \gamma_\varepsilon (2z-1), \\ v_4(z) &= (1+3\chi^2) \left[\operatorname{ch} (2\sqrt{1+\chi} + \sqrt{2} \tilde{\chi}_1) (z-1/2) \gamma_\varepsilon \times \cos (2\sqrt{1-\chi} - \sqrt{2} \tilde{\chi}_2) \gamma_\varepsilon (z-1/2) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ch} (2\sqrt{1+\chi} - \sqrt{2} \chi_1) \gamma_\varepsilon (z-1/2) \times \cos (2\sqrt{1-\chi} + \sqrt{2} \chi_2) \gamma_\varepsilon (z-1/2) - \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{1-\chi^2} \left[\sqrt{1-\chi^2} \operatorname{ch} \sqrt{2} \chi_1 \gamma_\varepsilon (z-1/2) \times \cos \sqrt{2} \chi_2 \gamma_\varepsilon (z-1/2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\chi \operatorname{sh} \sqrt{2} \chi_1 \gamma_\varepsilon (z-1/2) \times \sin \sqrt{2} \chi_2 \gamma_\varepsilon (z-1/2) \right] \right], \\ v_5(z) &= (1+3\chi^2) \left[\operatorname{sh} (2\sqrt{1+\chi}) + \sqrt{2} \chi_1 \gamma_\varepsilon (z-1/2) \times \sin (2\sqrt{1-\chi} - \sqrt{2} \chi_2) \gamma_\varepsilon (z-1/2) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} (2\sqrt{1+\chi} - \sqrt{2} \chi_1) \gamma_\varepsilon (z-1/2) \times \sin (2\sqrt{1-\chi} + \sqrt{2} \chi_2) \gamma_\varepsilon (z-1/2) \right] + \\ &\quad + 2\sqrt{1-\chi^2} \left[\sqrt{1-\chi^2} \operatorname{sh} \sqrt{2} \chi_1 \gamma_\varepsilon (z-1/2) \times \sin \sqrt{2} \chi_2 \gamma_\varepsilon (z-1/2) - \right. \\ &\quad \left. - 2\chi \operatorname{ch} \sqrt{2} \chi_1 \gamma_\varepsilon (z-1/2) \times \cos \sqrt{2} \chi_2 \gamma_\varepsilon (z-1/2) \right], \\ v_6(z) &= 2\chi \operatorname{ch} \sqrt{1+\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1) \times \cos \sqrt{1-\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1) - \\ &\quad - \sqrt{1-\chi^2} \operatorname{sh} \sqrt{1+\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1) \times \sin \sqrt{1-\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1) - \chi, \\ v_7(z) &= (1+3\chi^2) v_2^2(z) + 4\chi v_6(z). \end{aligned}$$

Аналогічно, для індукції магнітного поля отримаємо такі вирази для сталої складової, а також першої та другої гармонік їх амплітуд:

$$B_0(z) = \mu_0 \left[b_0 - \frac{\varepsilon_*^2 \mu_{1\varepsilon} v_1(z)}{2v_1(0)} \right], \quad A_{b_1}(z) = \mu_0 \mu_\varepsilon A_{h_1}(z),$$

$$A_{b_2}(z) = \frac{\mu_0 H_1 \varepsilon_* \mu_{1\varepsilon} \sqrt{B_2(z)}}{2\sqrt{1-\chi^2} (1+3\chi^2) v_1(0) \sqrt{v_3(0)}}, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} B_2(z) &= \mathcal{G}_2(z) + \sqrt{1-\chi^2} (1+3\chi^2) \mu_\varepsilon v_3(0) \left[\sqrt{1-\chi^2} \mu_\varepsilon v_1^2(z) + v_{b1}(z) + 2\chi v_{b2}(z) / v_3(0) \right], \\ v_{b1}(z) &= \sqrt{1-\chi^2} \left[\operatorname{ch} 2\sqrt{1+\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1) + \cos 2\sqrt{1-\chi} \gamma_\varepsilon (2z-1) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{ch} 2\sqrt{1+\chi} \gamma_\varepsilon z \times \cos 2\sqrt{1-\chi} \gamma_\varepsilon (1-z) - \operatorname{ch} 2\sqrt{1+\chi} \gamma_\varepsilon (1-z) \times \cos 2\sqrt{1-\chi} \gamma_\varepsilon z + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \operatorname{ch} \sqrt{1 + \chi} \gamma_\varepsilon (2z - 1) \times \cos \sqrt{1 - \chi} \gamma_\varepsilon (2z - 1) - 2 \operatorname{ch} \sqrt{1 + \chi} \gamma_\varepsilon \times \cos \sqrt{1 - \chi} \gamma_\varepsilon] - \\
& - 2 \chi \left[\operatorname{sh} 2 \sqrt{1 + \chi} \gamma_\varepsilon z \times \sin 2 \sqrt{1 - \chi} \gamma_\varepsilon (1 - z) + \operatorname{sh} 2 \sqrt{1 + \chi} \gamma_\varepsilon (1 - z) \times \sin 2 \sqrt{1 - \chi} \gamma_\varepsilon z + \right. \\
& \quad \left. + 2 \operatorname{sh} \sqrt{1 + \chi} \gamma_\varepsilon \times \sin \sqrt{1 - \chi} \gamma_\varepsilon \right], \\
v_{b2}(z) = & \operatorname{sh} \left[\left(2 \sqrt{1 + \chi} + \sqrt{2} \chi_1 \right) z - \sqrt{1 + \chi} \right] \gamma_\varepsilon \times \sin \left[\left(2 \sqrt{1 - \chi} - \sqrt{2} \chi_2 \right) z - \left(\sqrt{1 - \chi} - \sqrt{2} \chi_2 \right) \right] \gamma_\varepsilon + \\
& + \operatorname{sh} \left[\left(2 \sqrt{1 + \chi} - \sqrt{2} \chi_1 \right) z - \sqrt{1 + \chi} \right] \gamma_\varepsilon \times \sin \left[\left(2 \sqrt{1 - \chi} + \sqrt{2} \chi_2 \right) z - \left(\sqrt{1 - \chi} + \sqrt{2} \chi_2 \right) \right] \gamma_\varepsilon + \\
& + \operatorname{sh} \left[\left(2 \sqrt{1 + \chi} - \sqrt{2} \chi_1 \right) z - \left(\sqrt{1 + \chi} - \sqrt{2} \chi_1 \right) \right] \gamma_\varepsilon \times \sin \left[\left(2 \sqrt{1 - \chi} + \sqrt{2} \chi_2 \right) z - \sqrt{1 - \chi} \right] \gamma_\varepsilon + \\
& + \operatorname{sh} \left[\left(2 \sqrt{1 + \chi} + \sqrt{2} \chi_1 \right) z - \left(\sqrt{1 + \chi} + \sqrt{2} \chi_1 \right) \right] \gamma_\varepsilon \times \sin \left[\left(2 \sqrt{1 - \chi} - \sqrt{2} \chi_2 \right) z - \sqrt{1 - \chi} \right] \gamma_\varepsilon + \\
& + 2 \left[\operatorname{sh} \sqrt{2} \chi_1 \gamma_\varepsilon z \times \sin \sqrt{2} \chi_2 \gamma_\varepsilon (1 - z) + \operatorname{sh} \sqrt{2} \chi_1 \gamma_\varepsilon (1 - z) \times \sin \sqrt{2} \chi_2 \gamma_\varepsilon z \right].
\end{aligned}$$

Метод четвертого порядку точности

Після дискретизації по просторовій змінній, задачу (1)-(3) можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь з початковою умовою

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L] \quad (16)$$

де $y(x)$ – дійсний m – компонентний вектор, f – дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція f володіє необхідною для викладок гладкістю.

Використовуючи методику побудови однокрокових методів, а також теорію неперервних дробів, наближений розв'язок задачі Коші (16) представимо у вигляді [5]:

$$y_{n+1}^{[k,l]} = y_n / D_n, \quad (17)$$

де

$$D_n = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1 + \frac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}} .$$

Вирази для $d_{k,l}$ у випадку $k + l = \overline{1,4}$ ($k = \overline{1,4}$; $l = \overline{0,3}$) мають вигляд

$$\begin{aligned}
d_{0,0} = 1, \quad d_{i,0} = - \sum_{m=1}^i d_{i-m,0} \cdot \frac{\sigma_m}{y_n}, \quad i = \overline{1,4}, \\
d_{v,1} = - \frac{d_{v+1,0}}{d_{v,0}}, \quad v = \overline{1,3}, \quad d_{\mu,2} = d_{\mu+1,1} - d_{\mu,1}, \quad \mu = \overline{1,2} \\
d_{1,3} = d_{1,2} \frac{d_{2,2}}{d_{1,2}}, \quad \sigma_m = h \sum_{i=1}^4 a_{mi} k_i, \\
k_i = f(x_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad y_n \neq 0.
\end{aligned}$$

Тут h – крок інтегрування ($h = x_{n+1} - x_n$, $n = 0, 1, \dots$), a_{ij} , a_p , β_{ij} – параметри.

Розвинувши формулу (17) в ряд по степенях h і прирівнявши до нуля, коефіцієнти при степенях h^i ($i = 1, 4$), отримуємо умови, яким повинні задовольняти параметри a_{ij} , a_p , β_{ij} ($i, j = \overline{1, 4}$), щоб $y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[k,l]} = O(h^5)$.

Наведемо значення параметрів у випадку, якщо $\alpha_2 = \alpha_3$:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = 1, \quad \beta_{21} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_{43}}, \\ \beta_{32} = \frac{1}{2\beta_{43}}, \quad \beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 1 - \beta_{43}, \\ a_{11} = 1, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 1, \quad a_{31} = \frac{1}{6}, \quad a_{32} = -\frac{1 + \beta_{43}}{3}, \\ a_{33} = \frac{\beta_{43}}{3}, \quad a_{34} = \frac{1}{6}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$(a_{1j} = 0, j = \overline{2, 4}; a_{4j} = 0, j = \overline{1, 4}, a_{23} = a_{24} = 0;)$$

де β_{43} – відмінний від нуля параметр.

При $\alpha_2 \neq \alpha_3$ маємо:

$$\begin{aligned} a_{11} = 1, \quad a_{21} = -\frac{1}{2\alpha_2}, \quad a_{22} = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad \beta_{21} = \alpha_2, \\ a_{32} = \frac{3(1 + 2\alpha_3\alpha_4) - 4(\alpha_3 + \alpha_4) - 6(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{12\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}, \\ a_{33} = \frac{3(1 + 2\alpha_2\alpha_4) - 4(\alpha_2 + \alpha_4)}{12\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_3)}, \quad \beta_{32} = \frac{4\alpha_4 - 3}{24\alpha_2(\alpha_4 - \alpha_3) \cdot a_{33}}, \\ a_{34} = \frac{3(1 + 2\alpha_3\alpha_3) - 4(\alpha_2 + \alpha_3)}{12\alpha_4(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)}, \quad \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32}, \\ a_{31} = -(a_{32} + a_{33} + a_{34}), \quad \beta_{41} = \alpha_4 - \beta_{42} - \beta_{43}, \\ \beta_{42} = \frac{(3 - 4\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2) + 2(2\alpha_2 - 1)(\alpha_4 - \alpha_3)}{24\alpha_2(\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2) \cdot a_{34}}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0, \\ \beta_{43} = \frac{1 - 2\alpha_2}{12\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) \cdot a_{34}}, \quad a_{23} = a_{24} = 0, \quad a_{4i} = 0, \quad i = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (19)$$

де $\alpha_4 = 1$, α_2 і α_3 – довільні числа, що задовольняють співвідношення

$$\alpha_2 \cdot \alpha_3 (\alpha_2 - \alpha_3) (1 - \alpha_2) (1 - \alpha_3) \neq 0.$$

Побудова двосторонніх наближень третього порядку точності.

Ці розрахункові формули будуються так, щоб локальні похибки схеми в кожній вузловій точці мали вигляд:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \omega h^p KF(f) + O(h^{p+1}), \quad (20)$$

де $y(x_{n+1})$ і y_{n+1} - відповідно точний і наближений розв'язок задачі (1), h - крок інтегрування, $F(f)$ – деякий диференціальний оператор, обчислений в точці (x_n, y_n) , K – константа, p – порядок точності, ω - параметр двосторонності.

Наведемо значення параметрів при $\alpha_2 = \alpha_3$:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \alpha_3 &= \frac{1}{2}, & \beta_{21} &= \frac{1}{2}, & \beta_{31} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_{43}}, & \beta_{32} &= \frac{1}{2\beta_{43}}, \\ \alpha_4 &= 1, & \beta_{41} &= 0, & \beta_{42} &= 1 - \beta_{43}, \\ a_{11} &= 1, & a_{12} = a_{13} = a_{14} &= 0, & a_{21} &= -1, & a_{22} &= 1, & a_{23} = a_{24} &= 0, \\ a_{31} &= \frac{1}{6} + 2\omega, & a_{32} &= 2\omega(\beta_{43} - 2) - \frac{1}{3}(1 + \beta_{43}), \\ a_{33} &= \frac{1}{3}\beta_{43}(1 - 6\omega), & a_{34} &= \frac{1}{6} + 2\omega, & a_{41} &= -2\omega, \\ a_{42} &= 2\omega(2 - \beta_{43}), & a_{43} &= 2\beta_{43}\omega, & a_{44} &= -2\omega, \end{aligned} \quad (21)$$

де β_{43} – відмінний від нуля параметр. При цьому

$$y_{n+1} - y_{n+1}^{[4,0]} = \omega h^4 (D^2 f + f_y \cdot \mathcal{D}) + O(h^5) \cong h \sum_{i=1}^4 \tilde{a}_{4i} k_i \quad (22)$$

Запропоновані формули, використовуючи лише чотири звертання до правої частини диференціального рівняння, дозволяють отримувати в кожній вузловій точці не тільки односторонній метод четвертого порядку точності і двосторонні формули третього порядку точності, а також оцінку головного члена похибки двосторонніх наближень.

Зауважимо, що відомі [6-9] двосторонні методи Рунге-Кутта третього порядку точності містять щонайменше шість звертань до правої частини вихідного диференціального рівняння.

Аналіз розв'язків. Розглянемо шар із магнітотвердого матеріалу. Найбільш характерним представником такого матеріалу з великим значенням коерцитивної сили, який застосовується для запису інформації є сплав K25X30M3, характеристики якого наступні:

$$H_c = 62,4 \cdot 10^3 \text{ Å/ì}, H_m = 62,93 \cdot 10^3 \text{ Å/ì}, B_s = 1,16 \text{ Ò}, B_r = 1,15 \text{ Ò}, \mu_i = 14,67.$$

При цьому вважаємо $\varepsilon_* = 0,1$, а товщину шару прийємо $l = 2 \cdot 10^{-6}$, так як даний сплав виготовляють у вигляді тонких листів саме такої товщини. Зауважимо, що в такому випадку для даних характеристик матеріалу відносна глибина проникання магнітного поля γ (для немагнітних матеріалів) не перевищує одиниці ($\gamma < 1$) навіть для частот менших за $\nu = 5 \cdot 10^9 \text{ Åö}$, які розглядаються в даній роботі. Для магнітних матеріалів глибина проникання γ_ε є пропорційною $\sqrt{\mu_\varepsilon}$. Так як $\mu_\varepsilon \leq \mu = 14,67$ (див. Рис.1), то $\gamma_\varepsilon < \sqrt{\mu_\varepsilon} \cong 3,83$.

Так як всі розглядувані величини містять параметри μ_ε і $\mu_{1\varepsilon}$, то представляє практичний інтерес дослідити їх залежність від зовнішнього постійного

магнітного поля H_0 . Тут, та на наступних рисунках суцільні криві відповідають магнітотвердому матеріалу, пунктирні – еквівалентному магнітом'якому матеріалу, в якому знехтувано коерцитивною силою ($H_c = 0$ або $\chi = 0$), а всі інші характеристики такі ж, як і для магнітотвердого матеріалу.

Зауважимо на характерний хід кривої $\mu_\varepsilon(H_0)$, показаний на рис.1. Відносна магнітна проникність μ_ε повільно спадає до полів $H_0 < H_m = 62,93 \cdot 10^3 \text{ \AA/i}$, в точці $H_0 = H_m$ маємо злам кривої та різке зменшення даної величини. Для полів порядку $H_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ \AA/i} \cong 3H_m$ зникає різниця між магнітотвердим та магнітом'яким матеріалом. Це пов'язано із означенням величини χ , яке має місце для магнітотвердих матеріалів. Фізично це означає, що вплив коерцитивної сили є великим для полів $H_0 < H_m$, де H_m – величина напруженості магнітного поля, яка відповідає гістерезисному насиченню.

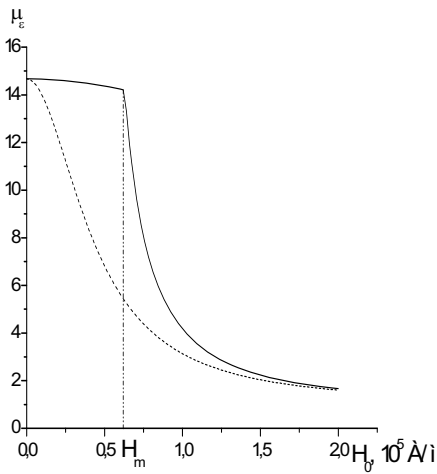


Рис. 1 Залежність відносної магнітної проникності μ_ε від постійного магнітного поля H_0

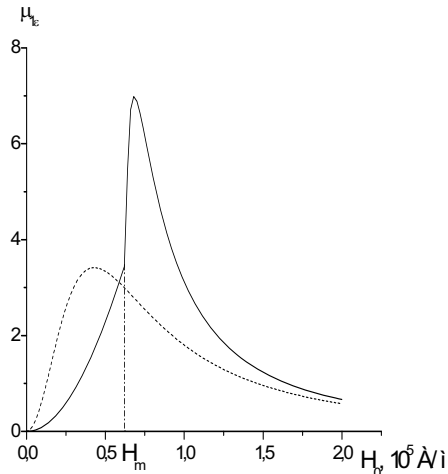


Рис. 2. Залежність величини $\mu_{1\varepsilon}$ від сталої складової напруженості магнітного поля H_0

Для полів $H_m < H_0 < 3H_m$ вплив коерцитивної сили різко зменшується і зовсім зникає для полів $H_0 > 3H_m$. Для еквівалентного магнітом'якого матеріалу залежність $\mu_\varepsilon(H_0)$ не має зламів і плавно спадає.

На рис. 2 наведено залежність величини $\mu_{1\varepsilon}$ від сталої складової напруженості магнітного поля H_0 . Зі збільшенням H_0 величина $\mu_{1\varepsilon}$ зростає, приймає максимальне значення $\mu_{1\varepsilon} \approx 7$ в точці $H_{\max} = 6,8 \cdot 10^4 \text{ \AA/i}$, а потім різко зменшується. Як і для магнітної проникності μ_ε величина $\mu_{1\varepsilon}$ в точці H_m має злам і також для полів $H > 2 \cdot 10^5 \text{ \AA/i}$ зникає вплив коерцитивної сили. Зауважимо, що аналогічний характер має крива $\mu_{1\varepsilon}$ для еквівалентного магнітом'якого матеріалу ($\chi = 0$). При $H_{\max} = 4,3 \cdot 10^4 \text{ \AA/i}$ вона досягає максимального значення $\mu_{1\varepsilon} = 3,42$, а далі повільно спадає.

Перейдемо тепер до аналізу розподілів амплітуд напруженості та індукції магнітного поля по товщинній координаті z , які наведено на рис. 3 – рис. 6. Графіки приведені для таких значень сталої складової напруженості магніт-

ного поля H_0 : 10^2 , 10^3 , 10^4 і 10^5 (А/м), які відповідають рисункам а, б, с і d відповідно. Криві 1 на цих рисунках відповідають частоті $\nu = 5 \text{ \AA}\ddot{\text{ö}}$, а криві 2 – відповідно $\nu = 5 \text{ \AA}\ddot{\text{ö}}$.

Як показано на рис. 3 амплітуда першої гармоніки напруженості магнітного поля пропорційна величині H_0 . Зі збільшенням напруженості поля H_0 розподіл A_{h1} стає більш рівномірний по товщині шару, при цьому суттєво стає помітною різниця між магнітотвердим та магнітом'яким матеріалом. Врахування коерцитивної сили приводить до збільшення глибини проникання магнітного поля (приблизно в $\sqrt{1 + \chi}$ разів).

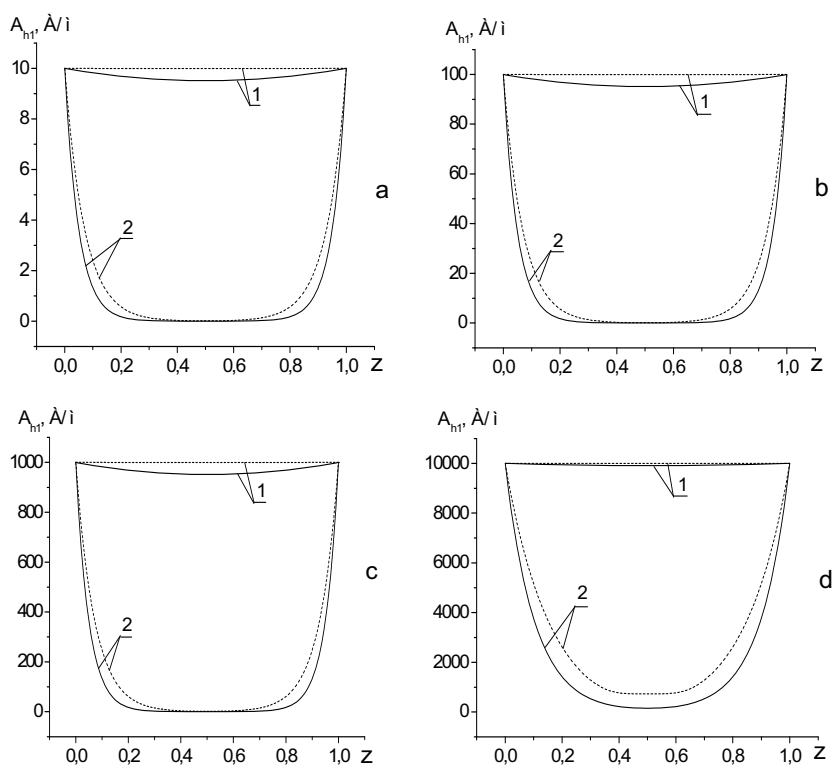


Рис. 3. Розподіл амплітуд напруженості магнітного поля по товщинній координаті z

На рис. 4 показано графіки розподілу амплітуди другої гармоніки напруженості магнітного поля. Зауважимо, що розподіл має параболічний характер. Зі збільшенням величини H_0 амплітуда зростає, досягає максимального значення при $H = 6,94 \cdot 10^4 \text{ \AA}/\text{i}$ яке рівне $A_{h1 \max} = 16,83 \text{ \AA}/\text{i}$ для $\nu = 5 \text{ \AA}\ddot{\text{ö}}$ і $A_{h1 \max} = 16,83 \cdot 10^3 \text{ \AA}/\text{i}$ для $\nu = 5 \text{ \AA}\ddot{\text{ö}}$ (див. рис. 7), а потім зменшується. Дуже цікавим фактом є те, що для полів $H < 5,71 \cdot 10^4 \text{ \AA}/\text{i}$ величина A_{h2} є більшою для еквівалентного магнітом'якого матеріалу; далі характер розподілу поля різко змінюється.

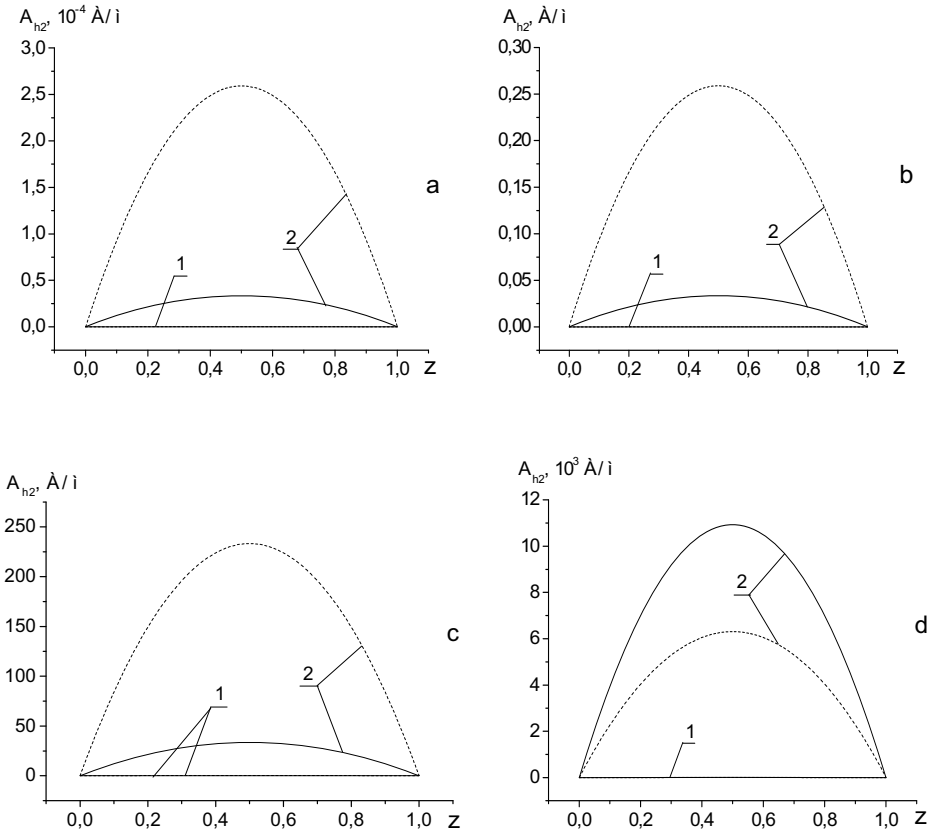
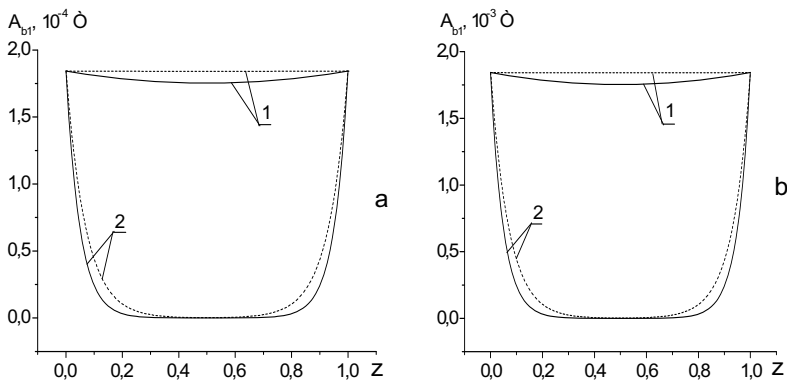


Рис. 4. Графіки розподілу амплітуди другої гармоніки напруженості магнітного поля

На рис. 5 показано розподіл амплітуди першої гармоніки індукції магнітного поля по товщинній координаті. Амплітуди збільшуються майже пропорційно величині H_0 (виняток становить частота $\nu = 5 \text{ \AA\AA}$, коли A_{b1} має пік при $H_0 \approx 6 \cdot 10^4 \text{ \AA/i}$, див. рис. 8), а розподіл стає більш плавним. Зауважимо, що маємо доволі складний вклад коерцитивної сили, який залежить як від величини H_0 , так і від частоти зовнішнього поля ν .



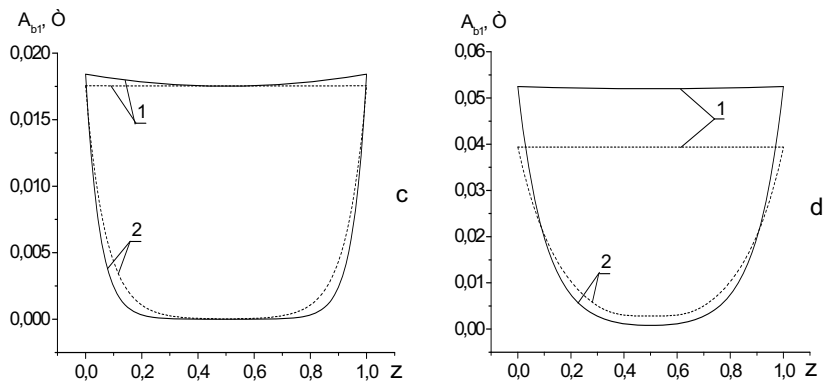


Рис. 5. Розподіл амплітуди першої гармоніки індукції магнітного поля по товщинній координаті

Розподіл другої гармоніки амплітуди індукції магнітного поля по координаті z показано на рис. 6. Як і для напруженості магнітного поля розподіл носить параболічний характер і також суттєво залежить від величин H_0 , ν і χ . Так зі збільшенням поля H_0 величина амплітуди A_{b2} досягає максимуму при $H_0 = 6,96 \cdot 10^4 \text{ Å/i}$, який рівний $A_{b2\text{max}} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ Oe}$ для $\nu = 5 \text{ Åö}$ та $A_{b2\text{max}} = 0,55 \text{ Oe}$ для $\nu = 5 \text{ Åö}$.

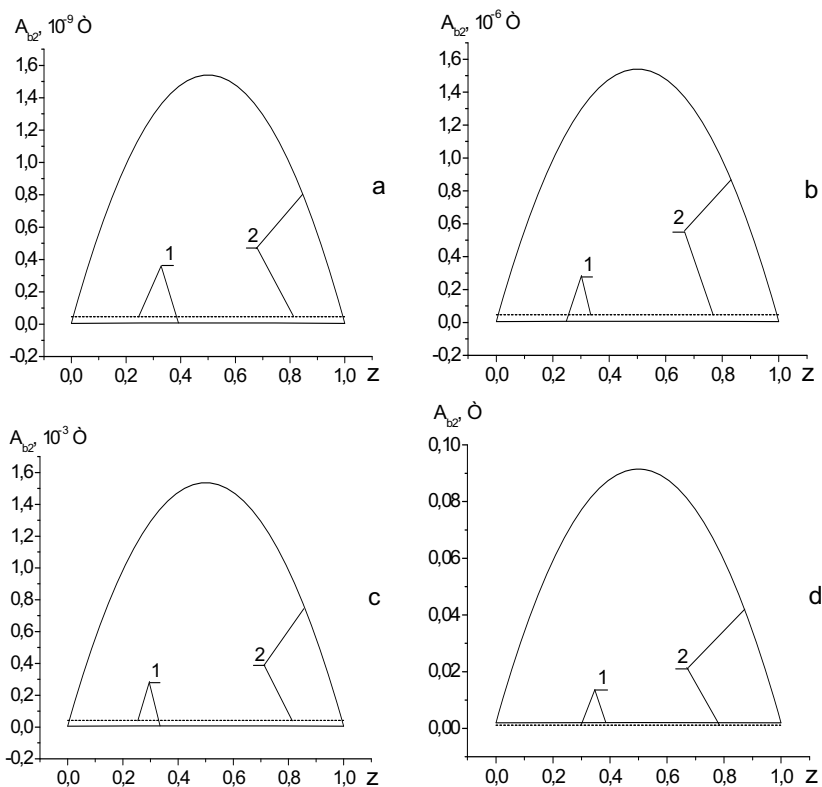


Рис. 6. Розподіл другої гармоніки амплітуди індукції магнітного поля по координаті z

Проведемо більш детальний аналіз залежностей характеристик магнітного поля від величини H_0 , які мають практичний інтерес. Так, на рис.7-рис.9 наведено графіки залежностей другої гармоніки напруженості магнітного поля A_{h2} та першої A_{b1} , а також другої A_{b2} гармонік індукції магнітного поля від величини H_0 посередині шару ($z = 1/2$).

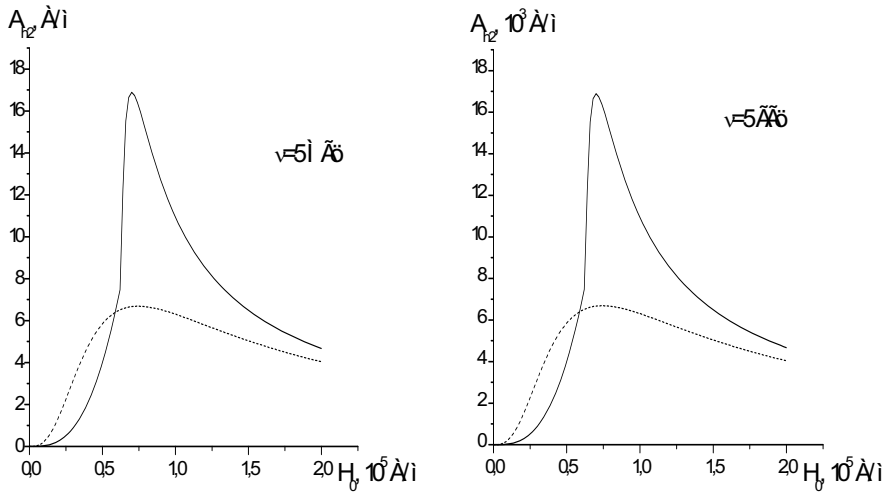


Рис. 7. Графіки залежностей другої гармоніки A_{h2} напруженості магнітного поля

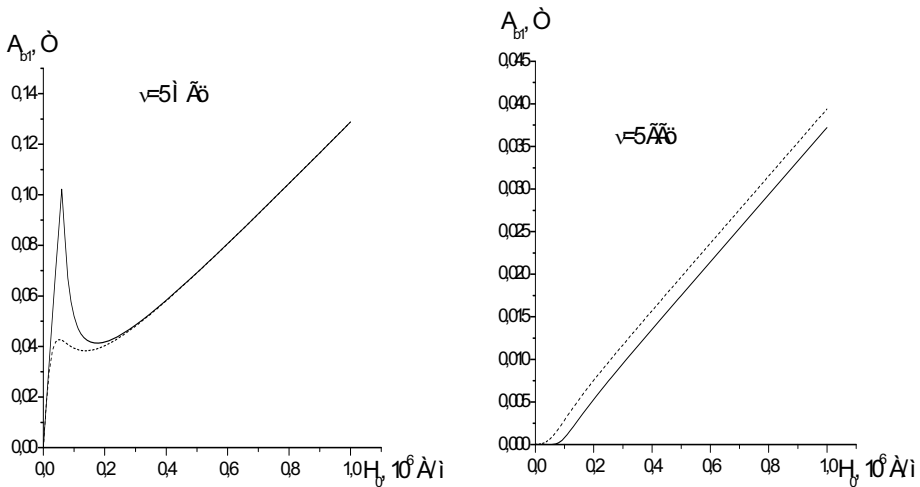


Рис. 8. Графіки залежностей першої гармоніки A_{b1} , напруженості магнітного поля

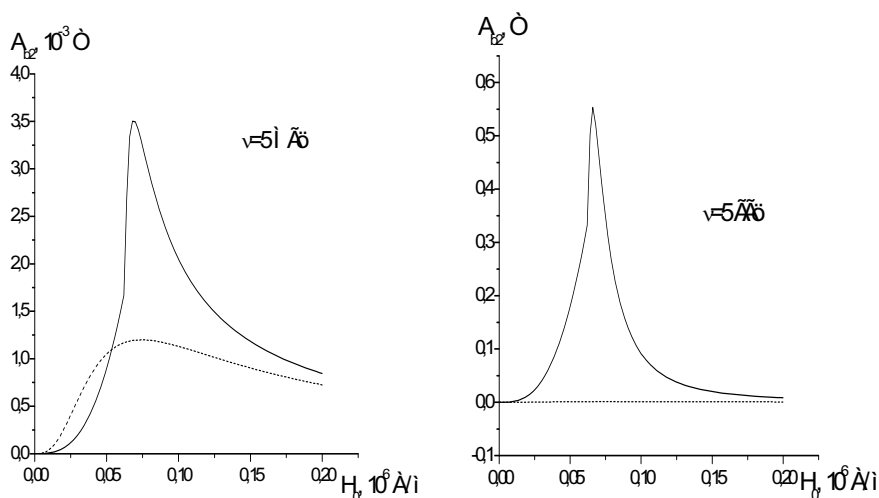


Рис. 9. Графіки залежностей другої гармоніки A_{b2} напруженості магнітного поля

Залежність $A_{h1}(H_0; z = 1/2)$ не наведено, так як із-за скін ефекту величина A_{h1} практично відсутня при $z = 1/2$.

Зауважимо, що числові результати, отримані з використанням методу малого параметру і нелінійних розрахункових формул відрізнялись на 4-5%.

Висновки. Таким чином, із проведеного аналізу випливає, що є суттєвим врахування впливу коерцитивної сили на розподіл напруженості та індукції магнітного поля у магнітотвердих тілах, які знаходяться за умов одночасної дії гармонійного за часом та постійного магнітних полів. Глибина проникання магнітного поля в магнітотвердих матеріалах збільшується в $\sqrt{1+\chi}$ разів у порівнянні з магнітом'яким, тобто розподіл амплітуд перших гармонік напруженості та індукції магнітного поля носить більш приповерхневий характер.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пелех Я. М, Крупка З. І., Солодяк М. Т. Розподіл магнітного поля у магнітом'якому шарі, що знаходиться за умов одночасної дії гармонійного за часом та постійного магнітного полів // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – 2005. – Випуск 6. – С. 109-119.
2. Вольфарт Э. Магнитотвердые материалы. – М.– Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 200 с.
3. Кологлу Ю. П., Захаркевич К. М., Карташевская М. И. Металлы и сплавы. Справочник. – Кишинев: Карта Молдовеняскэ, 1969. – 264 с.
4. Мишин Д. Д. Магнитные материалы. – М.: Высш. шк., 1981, – 335 с.
5. Pelekh Ya.M., Mentynskiy S.M., Pelekh R.Ya. Nonlinear numerical methods for the solution of initial value problem for ordinary differential equations // Scientific Bulletin of Mukachevo State University. Journal of Scientific Articles. – 2016. Issue 20(15). – P. 65-75.
6. Горбунов А.Д., Шахов Ю.А. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I. Ж. вычисл. матем. и математ. физ. – 1963. – 3, № 2. С. 239-253.

7. Добронев Б.С. Шайдунов В.В. Двусторонние численные методы. Новосибирск: Наука. – 1990. – 206 с.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том II. М.: Наука, 1977, - 400 с.
9. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатко А.А. Методы вычислений. – Киев: Вища школа. 1977. – 408 с.

REFERENCES

1. Pelekh Ya. M., Krupka Z. I., Solodyak M. T. (2005). Rozpodil mahnitnoho polya u mahnitomyakomu shari, shcho znakhodytsya za umov odnochasnoyi diyi harmoniynoho za chasom ta postiynoho mahnitnoho poliv // Mekhanika i fizyka ruynuvannya budivelnnykh materialiv ta konstruktsiy. — Vypusk 6. – S. 109-119. (in Ukrainian)
2. Volfart É. (1963). Mahnytotverdye materyaly. – M.– L.: Hosénerhoizdat,– 200 s. (in Russian)
3. Kolohlu Yu. P., Zakharkevych K. M., Kartashevskaya M. Y. (1969). Metally y splavy. Spravochnik. – Kyshynev: Kartya Moldovenyaské– 264 s. (in Russian)
4. Myshyn D. D. (1981). Mahnytnye materyaly. – M.: Vyssh. shk.– 335 s. (in Russian)
5. Pelekh Ya. M., Mentynskiy S. M., Pelekh R. Ya. (2016). Nonlinear numerical methods for the solution of initial value problem for ordinary differential equations // Scientific Bulletin of Mukachevo State University. Journal of Scientific Articles. –Issue 20(15). – S. 65-75.(in English)
6. Gorbunov A.D., Shakhov Yu.A. (1963). O priblizhennom reshenii zadachi Koshi dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s napered zadannym chislom vernykh znakov. I. Zh. vychisl. matem. i matemat. fiz. — 3, № 2. – S. 239-253. (in Russian)
7. Dobronets B.S. Shaydurov V.V. (1990). Dvustoronniye chislennyye metody. Novosibirsk: Nauka. — 206 s. (in Russian)
8. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrnyy P.I. (1977). Vychislitel'nyye metody. Tom II. M.: Nauka,– 400 s. (in Russian)
9. Lyashko I.I., Makarov V.L., Skorobogat'ko A.A. (1977). Metody vychisleniy. – Kiyev: Vishcha shkola. – 408 s. (in Russian)

DOI 10.32403/2411-9210-2019-1-41-65-79

MODELING AND ANALYSIS OF THE MAGNETIC FIELD DISTRIBUTION IN A MAGNET-SOLID LAYER UNDER THE CONDITIONS OF SIMULTANEOUS ACTION OF HARMONIOUS BY TIME AND CONSTANT MAGNETIC FIELDS

Yaroslav Pelekh, Yaroslav Glinskyi, Andrii Kunynets, Serhii Mentynskiy
Lviv Polytechnic National University 12, S.Bandery St., Lviv, 79013, Ukraine
Pelekh_Ya_M@ukr.net

In this paper, the distribution of the magnetic field in a magnet-solid layer, which is subject for simultaneous action of time-harmonic and permanent magnetic fields, has been studied. The calculations have been carried out using a method of the small parameter and nonlinear numerical method.

The suggested formulas, using only four appeals to the right-hand side of the differential equation, allow us to obtain not only a one-step method of the fourth order of accuracy, but also two-sided calculation formulas of the third order of accuracy. Note that when using the above calculation formulas, at each node we get several approximations to the exact solution. Comparison of these approximations provides additional information for the choice of the integration step or for evaluation of the accuracy of the result.

Keywords: *magnetic field, magnet-solid layer, equations of electrodynamics, induction, tension, Cauchy problem, continued fractions, nonlinear numerical methods, bilateral approximations.*

Стаття надійшла до редакції 12.02.2019

Received 12.02.2019