

УДК 681.624

ВИЗНАЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПЕРЕДАВАННЯ ФАРБИ НА МАТЕРІАЛ, ЩО ЗАДРУКОВУЄТЬСЯ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

М. І. Верхола, У. П. Пановик

Українська академія друкарства,
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна
ulianapanovik@gmail.com

У статті проведено аналіз математичних моделей передавання фарби на папір при друкуванні. Виявлено нелінійну залежність коефіцієнта передавання фарби на матеріал, що задруковується від її товщини на формі, яка безпосередньо впливає на процес перерозподілу фарби у фарбодрукарських системах. Це зумовлює потребу в отриманні зручного математичного опису процесу передавання фарби на відбитки.

За результатами апроксимації експериментальних даних встановлено дробово-раціональну математичну залежність коефіцієнта передавання фарби на папір від її товщини на формі. Отримана математична модель забезпечує найменшу можливу середню похибку апроксимації та адекватно описує передавання фарби на матеріал, що задруковується й є зручною для моделювання фарбодрукарських систем.

Описано алгоритм рівномірної чебишовської апроксимації дробово-раціональною функцією. Наведено результати апроксимації та проведено кореляційно-регресійний аналіз результатів.

Ключові слова: математична модель, коефіцієнт фарбопередавання, фарбодрукарська система, апроксимація, кореляційно-регресійний аналіз.

Постановка проблеми. Якість друкованої продукції в основному залежить від величини та рівномірності товщини фарби, яка передається на відбиток під час друкування. Товщина фарби, яка передається на матеріал, що задруковується безпосередньо залежить від налагодження фарбодрукарських систем. У сучасних друкарських машинах процес налагодження таких систем здійснюється за допомогою інформаційних технологій, які реалізуються на основі математичних моделей фарбодрукарських систем. Від точності математичного опису процесів розподілу та передавання фарби залежить якість друкованої продукції та витрати фарби й паперу. Для удосконалення таких математичних моделей у даній роботі пропонується визначити математичну залежність коефіцієнта передавання фарби на папір від її товщини на формі чи офсетному циліндрі, яка була б зручною для симуляторів фарбодрукарських систем.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Для оцінки фарбопередавання при друкуванні використовують коефіцієнт передавання фарби:

$$K_{II} = \frac{g_{від}}{g_{\phi}} = \frac{h_{від}}{h_{\phi}}, \quad (1)$$

де g_{ϕ} – кількість фарби на формі;
 $g_{від}$ – кількість фарби, що переходить на відбиток;
 h_{ϕ} – товщина потоку фарби на формі;
 $h_{від}$ – товщина фарби, яка передається на відбиток.

Уперше математичну інтерпретацію залежності коефіцієнта передавання фарби від товщини фарби на формі запропоновано авторами роботи [1], у якій процес перенесення фарби був представлений рівнянням:

$$K = \frac{y}{x} = \frac{b}{x} + f \frac{(x-b)}{x}, \quad (2)$$

де K – коефіцієнт передавання фарби;
 y – кількість фарби, яка передається на одиницю поверхні відбитка;
 x – початкова товщина потоку фарби на формі перед друкуванням;
 b – фарбоємність поверхні паперу;
 f – постійний коефіцієнт, що визначає кількість залишкової фарби, яка перенесена на підкладку.

Дане рівняння не отримало широкого застосування, оскільки воно використовується в основному у разі великих кількостях початкової фарби на друкарській формі та не враховує жодного з основних чинників, які впливають на процес перенесення фарби на відбиток.

Більш ширше застосування дістало рівняння, запропоноване в роботах [2, 3], яке згодом стало й базовим. Загальне емпіричне рівняння передавання фарби можна представити як:

$$K = \frac{y}{x} = \frac{(1 - e^{-kx})}{x} \left\{ b(1 - e^{-x/b}) + f \left[x - b(1 - e^{-x/b}) \right] \right\}, \quad (3)$$

де x – початкова кількість фарби на друкарській формі,
 k – константа, яка пов'язана з ефективною гладкістю паперу;
 b – кількість фарби, що іммобілізується папером;
 f – коефіцієнт, що визначає кількість залишкової фарби, яка перенесена на підкладку.

Проте, як вважають автори, це рівняння є досить складним для використання в математичних моделях фарбодрукарських систем, оскільки не визначено як і з якою точністю можна розрахувати константи.

У праці [4] запропоновано рівняння визначення коефіцієнта передачі фарби з плашки та растрових елементів на папір відповідно:

$$K = \frac{b}{2a \operatorname{ctg} \alpha_1} \left(1 - \frac{V \eta r b^2}{\sigma a^3} - \frac{3\theta r b}{4\sigma a} \right) \text{ та } K = \frac{b}{2a \operatorname{tg} \alpha_1} \left(1 - \sqrt{\frac{V \eta r b^2}{\sigma a^3} + \frac{3\theta r b}{4\sigma a}} \right), \quad (4)$$

де b – ширина плашки або діаметр растрового елемента;
 α_l – кут між поверхнею формного циліндра і фарбою в момент розриву потоку фарби;
 V – швидкість друкування;
 η – в'язкість фарби;
 r – відстань між фазами розриву;
 σ – поверхневий натяг фарби;
 a – товщина потоку фарби на формі;
 θ – гранична дотичне напруження.

У цих рівняннях була зроблена спроба поєднати фізико-хімічні властивості фарби, проте вони дуже складні для використання при моделюванні процесу фарбопередавання.

Автором роботи [5] запропонована формула для розрахунку коефіцієнта передавання фарби з офсетного полотна на папір за допомогою теорії фракталів:

$$P = \beta / \left(1 + \beta \frac{h_{\text{оф max}} \left(1 - \tilde{h}_{\text{оф max}}^{2-D_{S_{\text{оф}}}} \right)}{h_{\text{відб}} \left(1 - \tilde{h}^{2-D_{S_n}} \right)} \right), \quad (5)$$

де β – параметр, який визначає кількість фарби на відбитку;
 $h_{\text{оф max}}$ – максимальна товщина потоку фарби на офсетному полотні;
 $\tilde{h}_{\text{оф max}}$ – максимальна висота мікронерівностей офсетного полотна у відносних одиницях;
 $h_{\text{відб}}$ – товщина фарби на відбитку;
 \tilde{h} – висота мікронерівностей паперу у відносних одиницях;
 $D_{S_{\text{оф}}}$ – фрактальна розмірність поверхні офсетного полотна;
 D_{S_n} – фрактальна розмірність поверхні паперу.

Проте, у рівнянні використовуються різні параметри паперу та офсетного полотна, які складно визначити.

На основі експериментальних даних для математичного опису передавання фарби з форми на папір у роботі [6] було запропоновано рівняння гіперболи:

$$y = a + bx + \frac{c}{d + x}, \quad (6)$$

де y – маса фарби, яка переноситься на одиницю поверхні паперу, г/м²;
 x – маса фарби на одиницю поверхні перед передачею, г/м²;
 a, b, c, d – константи.

Однак, для запропонованого рівняння не наведено числових значень констант.

З аналізу проведених досліджень встановлено, що отримані математичні моделі для опису передавання фарби на папір є складними та малопридатними для використання їх при побудові моделей фарбодрукарських систем.

Тому дослідження фарбодрукарських систем на основі сучасних інформаційних технологій, які дозволяють моделювати процес розподілу та передавання фарби в друкарських машинах зумовлює подальший пошук зручного математичного опису передавання фарби на матеріал, що задруковується.

Мета статті – отримання математичної залежності коефіцієнта передавання фарби на матеріал, що задруковується від її товщини на формі чи офсетному циліндрі, яка адекватно відображає процес фарбопередавання та є зручною для побудови симуляторів фарбодрукарських систем.

Виклад основного матеріалу дослідження. За експериментальними даними, результати яких наведені в працях [7,8] встановлено, що залежність коефіцієнта передавання фарби на папір від товщини потоку фарби на формі $\beta=f(h_\phi)$ представляє собою криву (рис. 1). Зі збільшенням товщини фарби на формі h_ϕ коефіцієнт передавання фарби β спочатку різко зростає поступово набуваючи максимального свого значення, а потім плавно зменшується. Товщина потоку фарби, що передається на відбитки при офсетному друці становить 1-1,2 мкм [9], а це забезпечується при товщині фарби на офсетному полотні, що приблизно більша удвічі. Як видно з графіка при такому діапазоні товщин фарби на формі коефіцієнт передавання фарби β змінюється динамічно, що впливає на перерозподіл фарби у фарбодрукарських системах. Тому при побудові моделей таких систем потрібно враховувати цей фактор, що в свою чергу вимагає відповідного зручного математичного опису процесу передавання фарби на відбитки.

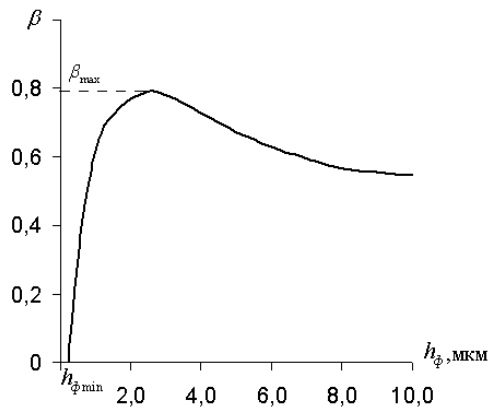


Рис. 1. Залежність коефіцієнта передавання фарби з форми на відбиток від її товщини на формі

Оскільки коефіцієнт передавання фарби на папір представляє собою відношення вихідної величини – товщини фарби на відбитку до вхідної величини – товщини потоку фарби на формі, то будемо вважати, що залежність $\beta=f(h_\phi)$ відповідає дробово-раціональній математичній моделі однієї змінної, яка являє собою відношення двох многочленів степенів n і m із коефіцієнтами $a_n \neq 0$ та $b_m \neq 0$ відповідно:

$$\beta = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}, \quad (7)$$

де $x = h_\phi$ – товщина потоку фарби на формі.

У загальному випадку задача апроксимації полягає в знаходженні функцій $f(x)$, яка буде відтворювати з необхідною точністю в робочому інтервалі задану графічно залежність $\varphi(x)$. Графічна залежність $\varphi(x)$, що представлена на рис. 1, задана робочим інтервалом $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$.

Найбільш ефективним і універсальним методом для аналітичної обробки експериментальних даних є рівномірна найкраща апроксимація за Чебишевим, яка володіє особливою властивістю не тільки отримувати високу точність апроксимації функціональних залежностей, але й забезпечувати необхідну гарантовану точність наближення в усіх точках безперервного інтервалу їх завдання [10].

Рівномірна найкраща чебишевська апроксимація формулюється як задача знаходження таких коефіцієнтів апроксимуючої функції $f(x)$, при яких найбільше відхилення функції $f(x)$ від отриманої експериментально $\varphi(x)$ на інтервалі апроксимації (робочому інтервалі) було б мінімальним, тобто:

$$\max_{x \in [x_{\min}, x_{\max}]} |f(x) - \varphi(x)| = \min = \delta, \quad (8)$$

де δ – задана точність відтворення.

Найкраще рівномірне наближення заданої на робочому інтервалі залежності будемо здійснювати на основі одного з варіантів чисельних методів розв'язання задачі чебишовської апроксимації, що зводиться до задачі лінійного програмування.

У даній роботі для апроксимації заданої функції $\varphi(x)$ використовуємо дробово-раціональну функцію $f(x)$ такого вигляду:

$$f(x) = P(x)/Q(x) = f(x; A; B), \quad (9)$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ – поліноми степенів n і m з набором відповідно коефіцієнтів $A = \{a_i\}, i = \overline{0, n}$ та $B = \{b_j\}, j = \overline{0, m}$.

Замінімо вказаний робочий інтервал деякою сукупністю точок $x_{\min}, x_1, x_2, \dots, x_{\max}$. Відповідно функцію $\varphi(x)$ також замінимо сукупністю точок $\varphi(x_{\min}), \varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_{\max})$ і будемо розв'язувати завдання чебишовської апроксимації цієї сукупності точок дробово-раціональною функцією $f(x) = P(x)/Q(x) = f(x; A; B)$. Експериментально встановлено, що під час апроксимації поліномами практично достатнім буде вибір числа точок, що в 5-10 разів перевищує ступінь полінома. Тоді результати вирішення безперервного й дискретного завдань чебишовського наближення збігаються з точністю до нескінченно малої величини.

Для вибраних точок можна записати таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} |f(x_{\min}; A; B) - \varphi(x_{\min})| \leq \delta; \\ |f(x_1; A; B) - \varphi(x_1)| \leq \delta; \\ |f(x_2; A; B) - \varphi(x_2)| \leq \delta; \\ \dots\dots\dots \\ |f(x_{\max}; A; B) - \varphi(x_{\max})| \leq \delta. \end{cases} \quad (10)$$

Шляхом підбору коефіцієнтів $A = \{a_i\}, i = \overline{0, n}$ та $B = \{b_j\}, j = \overline{0, m}$ дана задача розв'язується при умові мінімізації цільової функції $F = \delta = \min$. Знайдені в результаті вирішення цієї задачі коефіцієнти будуть визначати математичну модель найкращого наближення. Розв'язок нерівностей системи (10) є задачею лінійного програмування й може бути вирішена за стандартними програмами, такими як Mathcad, Maple, MATLAB, Mathematica та інші.

Для апроксимації експериментальних даних використовуємо графічну залежність коефіцієнта передавання фарби на крейдований папір (рис. 1), яка оцифрована у 21 точці з кроком 0,5. Робочий інтервал визначається технологічними параметрами друкування: $x_{\min} = h_{\phi \min}$ – мінімальна товщина потоку фарби на формі, що не передається на папір (для даного випадку $x_{\min} = h_{\phi \min} = 0,2 \text{ мкм}$); $x_{\max} = h_{\phi \max}$ – товщина потоку фарби на формі, яка не переноситься на папір (зазвичай становить 6-10 мкм) [4].

Результати апроксимації статичної характеристики передавання фарби для крейдового паперу при друці та її відтворення представлені у таблиці 1 та таблиці 2.

Таблиця 1

Результати апроксимації математичної моделі функції $\beta = f(h_\phi)$

тип моделі	Rational Model
рівняння	$y = (a + b \cdot x) / (1 + c \cdot x + d \cdot x^2)$
параметри моделі	$a = -0,6703, b = 3,3651$ $c = 2,7445, d = 0,3518$
коефіцієнт кореляції, r ($-1 < r < 1$)	$r = 0,996291$
коефіцієнт детермінації, r^2 ($0 < r^2 < 1$)	$r^2 = 0,992595$
середня похибка апроксимації, $\bar{\delta}$ ($\bar{\delta} < 8\%$)	$\bar{\delta} = 0,028\%$

Кореляційно-регресійний аналіз результатів, який наведений в таблиці 1, засвідчує, що характеристика передавання фарби з форми на папір $\beta = f(h_\phi)$ відповідає дробово-раціональній математичній моделі:

$$\beta = \frac{a + b \cdot h_\phi}{1 + c \cdot h_\phi + d \cdot h_\phi^2}, \quad h_{\phi \min} \leq h_\phi \leq h_{\phi \max} \quad (11)$$

де a, b, c, d – коефіцієнти моделі, які представлені в таблиці 1.

Таблиця 2

Результати відтворення залежності коефіцієнта передавання фарби на папір від її товщини на формі

x_i	$\varphi(x_i)$	$f(x_i)$	Δ
0,2	0	0,00174	-0,00174
0,5	0,42	0,41141	0,00859
1,1	0,65	0,65779	-0,00779
1,5	0,72	0,74080	-0,02080
2,0	0,77	0,76736	0,00264
2,5	0,79	0,76955	0,02045
3,0	0,77	0,76002	0,00998
3,5	0,76	0,74464	0,01536
4,0	0,74	0,72637	0,01363
4,5	0,7	0,70682	-0,00682
5,0	0,67	0,68689	-0,01689
5,5	0,65	0,66712	-0,01712
6,0	0,64	0,64779	-0,00779
6,5	0,62	0,62908	-0,00908
7,0	0,59	0,61106	-0,02106
7,5	0,58	0,59379	-0,01379
8,0	0,57	0,57727	-0,00727
8,5	0,56	0,56149	-0,00149
9,0	0,55	0,54643	0,00357
9,5	0,55	0,53206	0,01794
10,0	0,55	0,51834	0,03166

Отримана математична модель залежності коефіцієнта передавання фарби з форми на папір від її товщини на формі β забезпечує найменшу можливу середню похибку апроксимації, яка цілком достатня при моделюванні процесу фарбопередавання у фарбодрукарських системах.

Висновок. У результаті апроксимації експериментальних даних отримана математична модель залежності коефіцієнту передавання фарби з форми на папір від її товщини на формі. Встановлено, що вона має характер дробово-раціональної функції другого степеня. Визначено коефіцієнти отриманої залежності для крейдованого паперу з ефективною гладкістю 200 сек. Запропонований підхід можна застосувати для отримання залежностей коефіцієнтів передавання фарби для різних сортів паперу.

Отримана модель адекватно відображає процес фарбопередавання на матеріал, що задруковується й є зручною для моделювання й дослідження процесів розподілу та передавання фарби у фарбодрукарських систем різної структури.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Phil L. The ink transfer to paper in printing. / L. Phil, J. Olsson // Svensk Paperstidning 55. – 1952. – №10.
2. Fetsko J. M. Measurement of Ink Transfer in the Printing of Coated Paper / J. M. Fetsko, W. C. Walker // TAGA proceeding. – 1955. – P. 130–137.

3. Fetsko J. M. Sources in Picking Results among / J.M. Fetsko, W.D. Schaeffer, A.C. Zettelmoyer // 13th TAPPI Testing Conf. Philadelphia, 1962. – P. 1–6.
4. Овчинников Ю. М. Теория переноса краски в автотипном печатном процессе / Ю. М. Овчинников – М.: ВНИИ полиграфии, 1978. – Т. 27. – Вып. 2. – С. 61–67.
5. Кулак М. И. Фрактальная механика материалов / М. И. Кулак. – Минск: Высшая школа, 2002. – 304 с.
6. Якуцевич С. Перенос краски в печатном процессе: исследование и математическое описание / С. Якуцевич, И. Назар // Технологія та техніка друкарства. Технологічні процеси: збірник наукових праць / ВПІ НТУУ КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2003. – № 2. – С. 36–41.
7. Козаровицкий Л. А. Бумага и краска в процессе печатания / Л. А. Козаровицкий. – М.: Книга, 1965. – 368 с.
8. Раскин А. Н. Технология печатных процессов: Учебник для вузов / А. Н. Раскин, И. В. Ромейков, Н. Д. Бирюкова. – М.: Книга, 1989. – 432 с.
9. Технология полиграфии. Управление технологическим процессом по изготовлению растровых цветоделённых изображений, пробных и тиражных оттисков. Часть 1. Параметры процессов и методы измерения: ISO 12647-1:2013 [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: http://www.iso.org/iso/ru/iso_catalogue/catalogue_tc/ (дата обращения 01.02.2015). – Название с экрана.
10. Иванов В.В. Об эффективности алгоритмов полиномиальных и дробно-рациональных чебышевских приближений / В.В. Иванов, А.А. Каленчук // Конструктивная теория функций. – София, 1983. –С. 72-77.

REFERENCES

1. Phil L., Olsson J. (1952). The ink transfer to paper in printing. Svensk Paperstidning 55, (10). (in English)
2. Fetsko J. M., Walker W. C. (1955). Measurement of Ink Transfer in the Printing of Coated Paper. TAGA proceeding, 130 – 137. (in English)
3. Fetsko J. M., Schaeffer W.D., Zettelmoyer A.C. (1962). Sources in Picking Results among. 13th TAPPI Testing Conf. Philadelphia, 1–6. (in English)
4. Ovchinnikov Yu. M. (1978). Teoriya perenosa kraski v avtotipnom pechatnom protsesse. VNII poligrafii, 27 (2), 61 – 67. (in Russian).
5. Kulak M. I. (2002). Fraktalnaya mehanika materialov. – Minsk: Vysshaya shkola. (in Russian).
6. Yakutsevich S., Nazar I. (2003). Perenos kraski v pechatnom protsesse: issledovanie i matematicheskoe opisanie. Tehnologiya ta tehnika drukarstva. Tehnologichni protsesi: zbirnik naukovih prats , VPI NTUU KPI Im. Igorya SIKorskogo. (2), 36 – 41. (in Russian).
7. Kozarovitskiy L. A. (1965). Bumaga i kraska v protsesse pechataniya. Moskva: Kniga. (in Russian).
8. Raskin A. N. (1989). Tehnologiya pechatnyih protsessov: Uchebnik dlya vuzov. Moskva: Kniga. (in Russian).
9. Tehnologiya poligrafii. Upravlenie tehnologicheskim protsessom po izgotovleniyu rastrovyyih tsvetodelyonnyih izobrazheniy, probnyih i tirazhnyih ottiskov. Chast 1. Parametry protsessov i metody izmereniya: ISO 12647-1:2013 [Elektronnyiy resurs]. – Elektronnyie dannyye. – Rezhim dostupa: http://www.iso.org/iso/ru/iso_catalogue/catalogue_tc/ (data obrascheniya 01.02.2015). – Nazvanie s ekrana. (in Russian).

10. Ivanov V.V., Kalenchuk A.A. (1983). Ob effektivnosti algoritmov polinomialnyih i drobno-ratsionalnyih chebyshevskih priblizheniy. Konstruktivnaya teoriya funktsiy. – Sofiya, 72-77. (in Russian).

UDC 681.624

**MATHEMATICAL MODEL DETERMINATION OF INK TRANSFER
ON MATERIAL THAT IS PRINTED BY THE EXPERIMENTAL DATA
RESULTS**

M. I. Verkhola, U. P. Panovyk
*Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
ulianapanovuk@gmail.com*

In the article, the analysis of mathematical models of the ink transfer on paper during printing has been done. The nonlinear dependence of ink transfer coefficient on the material that is printed from its thickness on a form has been revealed. It directly affects the process of ink redistribution in ink printing systems and it leads to the need for a convenient mathematical description of the process of ink transfer to the imprints.

According to the results of the experimental data approximation, a fractional-rational mathematical dependence of the ink transfer coefficient on paper from its thickness on the form has been established. The obtained mathematical model provides the least possible average error of approximation and adequately describes the ink transfer to the material that is printed and it is convenient for modelling of ink printing systems.

The algorithm for uniform Chebyshev approximation by fractional-rational function has been described. The results of approximation have been presented and the correlation-regression analysis of results has been carried out.

Keywords: *mathematical model, ink transfer coefficient, ink printing system, approximation, correlation-regression analysis.*

*Стаття надійшла до редакції 25.05.2017
Received 25.05.2017*