УДК 539.377
© Я. Пушак[1], 2012

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ ЗГИНУ В ПЛАСТИНЦІ З ОТВОРОМ

Виведено формули для обчислення температурних напружень в пластинці, послабленій еліптичним, трикутним або квадратним отвором

The formulas for thermal stresses in a plate circulationswhich have been weakened by an elliptical or triangular or square holes deducted

1. ВСТУП

Як відомо, наявність отворів в пластинчастих елементах конструкцій, в тому числі і поліграфічних, приводить до збурення температурного поля, а значить, до концентрації температурних напружень. Важливе значення має форма отвору пластинки. В даній роботі досліджуються температурні напруження в пластинці постійної товщини відповідно з еліптичним, трикутним чи квадратним отвором.

2. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Виходячи із класичної теорії згину тонких пластинок для визначення прогину w, маємо неоднорідне бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta w = -\frac{\alpha(1+\nu)}{h}\Delta T. \tag{1}$$

Загальний розв'язок якого можна представити [1] у вигляді

$$w = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right] - \frac{\alpha(1+\nu)}{4h}\iint T dz d\bar{z}, \tag{2}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}$ – оператор Лапласа, α – коефіцієнт тепловіддачі, ν – коефіцієнт Пуасона, h – півтовщина пластинки, $T = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} \gamma t d\gamma$ – інтегральна характеристика температури $t(x, y, \gamma, \tau)$, $\varphi(z)$ і $\chi(z)$ – аналітичні функції комплексної змінної $z = x + iy$, τ – час.

---

[1] Українська академія друкарства

Якщо область пластинки з отвором відображається на область одиничного круга функцією $z = \omega(\zeta)$, то для визначення аналітичних функцій $\varphi(z)$ і $\varphi_1(z) = \chi'(z)$ в полярній системі координат маємо контурну умову

$$\varphi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi_1'(\sigma)} = \frac{\alpha(1+\nu)}{2h}\int_0^\tau T\omega'(\zeta)d\zeta. \tag{3}$$

Моменти і зусилля визначаються відповідно формулами

$$M_\rho + M_\theta = -2(1+\nu)D\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\alpha(1-\nu)}{2h}T\right];$$

$$M_\theta - M_\rho + 2iH_{\rho\theta} = 2(1-\nu)D\frac{\zeta^2}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \right.$$

$$\left. + \Psi(\zeta)\omega'(\zeta) - \frac{\alpha(1+\nu)}{2h}\int\frac{\partial T}{\partial\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}d\zeta\right];$$

$$N_\rho - iN_\theta = -4D\frac{\zeta}{\rho\,|\overline{\omega'(\zeta)}|}\Phi'(\zeta); \tag{4}$$

$$u + iv = \varphi_1(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)} - \frac{\alpha(1+\nu)}{h}\int T\omega'(\zeta)d\zeta. \tag{5}$$

Тут введені такі позначення:

$\varphi(z) = \varphi[\omega(\zeta)] = \varphi_1(\zeta)$; $\psi(z) = \psi[\omega(\zeta)] = \psi_1(\zeta)$;

$\Phi(z) = \dfrac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$; $\Psi(z) = \dfrac{\psi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$.

Вважаючи інтегральну характеристику T незалежною від координат, а залежною тільки від температури τ, з рівняння (4) отримуємо:

$$M_\rho - iH_{\rho\theta} = -(1+\nu)D\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\alpha(1-\nu)}{2h}T(\tau)\right] -$$

$$-(1-\nu)D\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)\right]. \tag{6}$$

На контурі отвору пластинки ($\rho = R$) маємо $M_\rho = 0$, $H_{\rho\theta} = 0$, а при $\rho = \infty$

$$M_\rho = -\frac{\alpha(1+\nu)DT(\tau)}{h},\ H_{\rho\theta} = 0; \tag{7}$$

контурна умова (3) при цьому прийме такий вигляд

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} + \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\sigma^2\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\left[\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)}\right] = -\frac{\alpha(1-\nu)}{2h}T(\tau). \quad (8)$$

або, якщо перейти до спряжених значень, отримаємо

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} + \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma^2\omega'(\sigma)}\left[\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)}\right] = -\frac{\alpha(1-\nu)}{2h}T(\tau) \quad (9)$$

<u>Еліптичний отвір.</u>

Функція, яка конформно відображає зовнішність еліптичного отвору на зовнішність одиничного круга γ, має вигляд [2]:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \ 0 \le m \le 1 .$$

Представивши функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ у вигляді степеневих рядів, із (8) і (9) після певних обчислень знаходимо

$$\Phi(\zeta) = -\frac{\alpha T(\tau)}{4h(m-\zeta^2)}\left[(1+\nu)(\zeta^2 - m) + 4m\right]; \quad (10)$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{\alpha T(\tau)\zeta^2}{h(1-\nu)(m-\zeta^2)^3}\left[(1+\nu)(m^3+\zeta^3) - m(3-\nu)(1+m\zeta^2)\right]. \quad (11)$$

Розв'язуючи сумісно перші два рівняння системи (4), враховуючи (10), (11), для визначення компонент напружень отримаємо:

$$M_\rho = -\frac{\alpha D T(\tau)(1-\rho^2)}{h(m^2 - 2m\rho^2\cos 2\theta + \rho^4)^2}\left[4m\rho^2(m^2+\rho^2)\cos 2\theta - \right.$$
$$\left. - m^2\rho^2(3-\nu)(1+\rho^2) - (1+\nu)(m^4+\rho^6)\right];$$
$$M_\theta = -\frac{\alpha D T(\tau)}{h(m^2 - 2m\rho^2\cos 2\theta + \rho^4)^2}\left\{(1+\nu)(1+\rho^2)(\rho^6 - m^4) + \right.$$
$$\left. + m^2\rho^2(3-\nu)(1-\rho^4) - 4m\rho^2\left[\rho^2(1+\nu\rho^2) - m^2(\nu+\rho^2)\right]\cos 2\theta\right\};$$
$$H_{\rho\theta} = \frac{2m\alpha(1-\rho)DT(\tau)\rho^2(1-\rho^2)(m^2-\rho^2)}{h(m^2 - 2m\rho^2\cos 2\theta + \rho^4)^2}\sin 2\theta \quad (12)$$

На контурі еліптичного отвору $\rho = 1$, тоді $M_\rho = H_{\rho\theta} = 0$,

$$M_\theta = -\frac{4k(1+\nu)DT(\tau)}{h(1-\cos 2\theta + k^2(1+\cos 2\theta))},$$

тут $k = \dfrac{b}{a}$, a і b – півосі еліпса.

Якщо в формулах (12) покласти $m = 0$, то отримаємо формули для обчислення напружень в пластинці з круговим отвором.

Трикутний отвір

В цьому випадку функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ знаходимо у вигляді

$$\Phi(\zeta) = \frac{\alpha T(\tau)}{4h(3\zeta^2 - 2)}\left[(1+\nu)(3\zeta^2 - 2) + 8\right]; \tag{13}$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{\alpha T(\tau)\zeta^4}{h(1-\nu)(3\zeta^2 - 2)^3}\left[5(1+\nu)(3\zeta^2 - 2) - 18(1-\nu)(3+\zeta^3)\right]. \tag{14}$$

Компоненти напружень в пластинці знаходимо за формулами:

$$M_\rho = -\frac{\alpha D T(\tau)(1-\rho^2)}{h(9\rho^6 - 12\rho^3\cos 3\theta + 4)^2}\Big\{18(1-\nu)\left[(9\rho^4 + 2\rho^2 + 2) - \right.$$
$$\left. - 3\rho(\rho^4 + \rho^2 + 2)\right] - (1+\nu)(9\rho^6 - 12\rho^3\cos 3\theta + 4)(9\rho^4 + 4\rho^2 + 4)\Big\};$$

$$M_\theta = -\frac{\alpha D T(\tau)}{h(9\rho^6 - 12\rho^3\cos 3\theta + 4)^2}\Big\{(1+\nu)(9\rho^6 - 12\rho^3\cos 3\theta + 4)(9\rho^6 +$$
$$+ 5\rho^4 - 4) + 18(1-\nu)\rho^3\left[(9\rho^6 - 7\rho^4 - 2)\cos 3\theta - 3\rho(\rho^6 + \rho^2 - 2)\right]\Big\};$$

$$H_{\rho\theta} = \frac{162\alpha D T(\tau)(1-\nu)\rho^3(\rho^6 - 1)}{h(9\rho^6 - 12\rho^3\cos 3\theta + 4)^2}\sin 3\theta. \tag{15}$$

Напруження на контурі трикутного отвору будуть

$$M_\rho = H_{\rho\theta} = 0\,;\; M_\theta = -\frac{10\alpha(1+\nu)D T(\tau)}{h(13 - 12\cos 3\theta)}\,.$$

Квадратний отвір

Функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ в цьому випадку мають такий вигляд:

$$\Phi(\zeta) = \frac{\alpha T(\tau)}{4h(1+2\zeta^4)}\left[(1+\nu)(1+2\zeta^4) - 4\right]; \tag{16}$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{\alpha T(\tau)\zeta^6}{3h(1-\nu)(1+2\zeta^4)^3}\left[9(1+\nu)(1+2\zeta^4) + 8(1-\nu)(6-\zeta^4)\right]. \tag{17}$$

Компоненти моментів згину знаходимо у вигляді:

$$M_\rho = -\frac{\alpha D T(\tau)}{3h(1+4\rho^4\cos 4\theta + 4\rho^8)^2}\Big\{3(1+\nu)(4\rho^8 - 3\rho^6 - 1)(1 + 4\rho^4\cos 4\theta +$$
$$+ 4\rho^8) + 8\rho^4(1-\nu)\left[4\rho^4 - 6\rho^2 + 2\rho^{10} + (12\rho^8 - 11\rho^6 - 1)\cos 4\theta\right]\Big\};$$

$$M_\theta = -\frac{\alpha D T(\tau)}{3h(1+4\rho^4\cos 4\theta + 4\rho^8)^2}\Big\{3(1+\nu)(4\rho^8 - 3\rho^6 - 1)(1 + 4\rho^4\cos 4\theta +$$
$$+ 4\rho^6) - 8(1-\nu)\rho^4\left[\rho^2(4\rho^2 + 2\rho^8 - 6) + (12\rho^8 - 11\rho^6 - 1)\cos 4\theta\right]\Big\};$$

$$H_{\rho\theta} = -\frac{8\alpha(1-\nu)DT(\tau)\rho^4}{3h(1+4\rho^4\cos 4\theta + 4\rho^8)^2}(13\rho^6 - 12\rho^8 - 1)\sin 4\theta. \qquad (18)$$

При $\rho = 1$ отримаємо значення зусиль на контурі отвору.

3. ВИСНОВКИ

Метод, запропонований в даній роботі, оснований на застосуванні апарату комплексних функцій і дозволяє вивести формули для обчислення компонент температурних зусиль в пластинках, послаблених отворами. В залежності від виду отвору формули для обчислення напружень суттєво відрізняються між собою. Важливим є аналіз зусиль на границі отвору.

1. Швец Р.Н. Применение функций комплексного переменного к решению температурной задачи изгиба тонких пластинок. – Прикл. механика, 1968, 4, вип. 6. – К. - С.23–28. 2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М: Наука, 1966. – 707 с.