

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОГО ЦИЛІНДРА ЩОДО ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТЕ- ПЛОФІЗИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЕЛЕМЕНТІВ ПОЛІГРАФІЧНО- ГО ОБЛАДНАННЯ

Розглянуто єдиний підхід до розв'язування як прямих задач термопружності для циліндричних тіл з тонкими приповерхневими шарами, так і обернених задач межової параметричної ідентифікації за заданими на поверхні температурою чи коловими напруженнями. Запропонований метод дає змогу визначати невідомі теплофізичні параметри елементів поліграфічного обладнання під час їх виготовлення чи експлуатації.

General approach to solving direct problems for cylindrical bodies with thin coatings as well as boundary inverse problems of parameter identification is proposed. This approach can be used when identifying unknown thermo-physical parameters of printing machines elements.

1. ВСТУП

В поліграфії оновлюються виробничі потужності на основі їх модернізації і комп'ютеризації, впроваджуються нові технології. Для ефективного керування перебігом технологічних процесів і режимами експлуатації обладнання розглядається дедалі повніший спектр супутніх фізико-механічних процесів і явищ, використовуються матеріали неоднорідної, в т.ч. композитної структури [4, 5]. Тому важливого значення набуває проблема адекватного математичного моделювання фізико-механічного стану елементів обладнання і параметричної ідентифікації побудованих моделей [1, 6, 7]. Фізико-механічні властивості матеріалів приповерхневих шарів більшості таких елементів відрізняються від властивостей основного матеріалу. Це пов'язано як з нанесенням спеціальних захисних покриттів, так і зі структурними змінами, що відбуваються в матеріалах таких шарів під час виготовлення та експлуатації за дії різноманітних фізико-механічних процесів [8, 10].

Циліндричні тіла є поширеним елементом поліграфічного обладнання. Дослідження фізико-механічних полів в неоднорідних, шаруватих тілах, визначення напружено-деформованого стану, ідентифікація теплофізичних параметрів мають особливий теоретичний і практичний

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

інтерес [4, 5, 7]. Відповідні крайові задачі, які враховують вплив різноманітних полів і неоднорідність структури тіл часто є неklasичними і потребують розробки нових підходів до розв'язання [4, 8, 9, 10]. Обернені задачі, до яких належать задачі ідентифікації теплофізичних параметрів, є чутливими до похибок вимірювання, що в математичному плані проявляється в їх нестійкості щодо малих збурень вхідних даних [1, 2].

У зв'язку зі складністю, а деколи і неможливістю побудови аналітичних розв'язків таких задач, значного поширення набули аналітично-числові та числові схеми розв'язання. Їх особливістю є поєднання переваг аналітичних методів, які дозволяють розглядати граничні переходи і асимптотичні режими, із високою універсальністю і простотою числових методів. Методи, основані на використанні сплайн-апроксимацій, широко використовуються під час розв'язування задач обчислювальної математики, математичної фізики і механіки, що зумовлюється їх стійкістю до локальних збурень, хорошою збіжністю сплайн-апроксимацій і точністю одержуваних розв'язків, простотою і зручністю реалізації алгоритмів їх побудови і обчислення [3].

В статті на прикладі нагріву довкіллям довгого циліндра з тонким приповерхневим шаром проілюстровано застосування розробленого загального аналітично-числового підходу до розв'язування як прямих неklasичних крайових задач термопружності зі нестационарними граничними умовами так і обернених задач ідентифікації межових теплофізичних параметрів [9, 10]. Одержані розв'язки прямої задачі будуть використані під час межової параметричної ідентифікації.

2. ПОСТАВА І РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ

Постава прямої задачі. Розглянемо довгий суцільний ізотропний циліндр радіуса r_1 , тонкий приповерхневий шар якого має неоднакові з основним матеріалом теплофізичні властивості, і який нагрівається середовищем сталої температури T_c . Поширеним є моделювання приповерхневих та міжфазних неоднорідностей за допомогою тонких оболонок [4, 8, 10]. Запропонований Я.С. Підстригачем [8] підхід, який полягає у спрямуванні товщини оболонки до нуля за одночасного усереднення фізико-механічних характеристик, вилучає з розгляду оболонку як фізичний об'єкт і приводить до задач з узагальненими неklasичними гранично-контактними умовами [8]. Задаватимемо такими умовами осесиметричний теплообмін циліндра з довкіллям через тонкий приповерхневий шар [8].

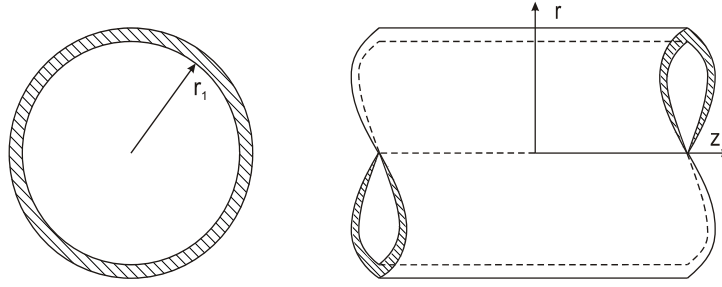


Рис. 2. Схема довгого циліндра з тонким приповерхневим шаром та його поперечний переріз

Запишемо рівняння нестационарної теплопровідності в циліндрі та узагальнені граничні умови

$$\Delta T(r, \tau) = \alpha^2 \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 \leq r < r_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} + B \cdot T(r, \tau) + H \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \Big|_{r=r_1} = 0, \quad r = r_1, \quad (2)$$

Тут $T(r, \tau) = \tilde{T} - T_c$; \tilde{T} – температура циліндра; α^{-1} – коефіцієнт температуропровідності; Δ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат; B , H – відповідно зведені коефіцієнти тепловіддачі з поверхні циліндра та об'ємної теплоємності циліндра і приповерхневого шару [8]. Граничні умови (2) нестационарні, вони дозволяють врахувати кінетику процесу теплопровідності на поверхні циліндра.

Задаємо початкову умову, умови обмеженості і осесиметрії

$$T(r, 0) = T^0, \quad \tau = 0, \quad (3)$$

$$T(r, \tau) < \infty, \quad \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \quad (4)$$

Розв'язання прямої задачі. Для розв'язання задачі (1)-(4) використаємо метод розвинення розв'язків неklasичних крайових задач в ряди Фур'є за власними функціями задач з класичними граничними умовами [9]. Розщеплюємо умову (2) за допомогою введення межової зв'язувальної функції [9]

$$a) \quad B \cdot T(r_1, \tau) = \Phi(\tau), \quad b) \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_1} + H \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \Big|_{r=r_1} = -\Phi(\tau). \quad (5)$$

Крайова задача (1), (3), (4), (5.a) є класичною. Застосувавши схему методу відокремлення змінних, будемо структуру розв'язку вихідної

задачі (1)-(4), що містить невідому зв'язувальну функцію $\Phi(\tau)$. Для її визначення залишається невикористана умова (5.б). Ця структура розв'язку містить розвинення в ряд Фур'є за власними функціями класичної задачі з граничною умовою першого роду

$$T(r, \tau) = \frac{r^2}{r_1^2} \cdot \frac{\Phi(\tau)}{B} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\tau) \cdot \frac{J_0(\alpha \mu_n r)}{\alpha \mu_n r_1 J_1(\alpha \mu_n r_1)}. \quad (6)$$

Тут $J_0(x)$, $J_1(x)$ функції Бесселя, μ_n – нулі функції $J_0(x)$, а залежна від $\Phi(\tau)$ функція часу $E_n(\tau)$ має вигляд:

$$E_n(\tau) = T^0 e^{-\mu_n^2 \tau} - \frac{\Phi(\tau)}{B} \cdot \frac{(\alpha \mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha \mu_n r_1)^2} + \frac{2\mu_n^2}{B} \int_0^{\tau} \Phi(t) e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt$$

Зв'язувальну функцію $\Phi(\tau)$, якою визначається температура поверхні циліндра, знаходимо, підставивши (6) в невикористану умову (5.б). Одержимо інтегро-диференціальне рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерри

$$\frac{H}{B} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} + \left(1 + \frac{2}{r_1 B} \right) \Phi(\tau) = \frac{2}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\tau) \quad (7)$$

Інтегро-диференціальне рівняння (7) розв'язуємо, апроксимуючи функцію $\Phi(\tau)$ на рівних часових проміжках кубічними сплайнами [3], для визначення коефіцієнтів яких крім рівняння (7) використовуються умови сумісності сплайнів у внутрішніх вузлах розбиття часового інтервалу. Оптимальність розбиття часового інтервалу та вибір кількості членів ряду в (6) і (7) для забезпечення задовільної точності обчислення температури досліджено в роботі [9].

За знайденим температурним полем визначасмо напруження в циліндрі. Механічним впливом приповерхневого шару на напружений стан нехтуємо. Поверхню циліндра вважаємо ненавантаженою

$$\sigma_{rr} = 0, \quad r = r_1. \quad (8)$$

Для поперечного перерізу циліндра виконується умова рівноваги

$$\int_0^{r_1} r \sigma_{zz} dr = 0. \quad (9)$$

У випадку осесиметричної задачі колові переміщення рівні нулю. Інші компоненти переміщень подаємо у вигляді Папковича-Нойбера [8].

$$u_r = \Lambda_r + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} (\Lambda - r\Lambda_r - z\Lambda_z)$$

$$u_z = \Lambda_z + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (\Lambda - r\Lambda_r - z\Lambda_z)$$

Для визначення температурних напружень використовуємо співвідношення Дюгамеля-Неймана [4, 8]. Як результат одержуємо вирази для напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2\mu}{4(1-\nu)} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\mu}{4(1-\nu)} \left[-\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right], \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\mu}{4(1-\nu)} \left[-\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут λ, μ - сталі Ляме, ν - коефіцієнт Пуассона, $\Lambda(r, \tau)$ має вигляд

$$\begin{aligned} \Lambda(r, \tau) = 4(1+\nu)\alpha_T \left\{ \frac{r^4}{16 \cdot r_1^2} \frac{\Phi(\tau)}{B} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\Phi(\tau)}{B} \frac{(\alpha\mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha\mu_n r_1)^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - T^0 e^{-\mu_n^2 \tau} \right) \frac{1}{(\alpha\mu_n)^3 r_1} - \frac{1}{\alpha^2 \mu_n r_1} \int_0^{\tau} \frac{\Phi(t)}{B} e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt \right] \frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{J_1(\alpha\mu_n r_1)} \right\}, \end{aligned}$$

де α_T - коефіцієнт лінійного температурного розширення циліндра.

Таким чином вирази (6), (10) є розв'язками сформульованої задачі термопружності для довгого суцільного циліндра з тонким приповерхневим шаром, який нагрівається довкіллям, якщо визначено межову зв'язувальну функцію $\Phi(\tau)$, що задовольняє інтегро-диференційне рівняння (7).

2. ПОСТАВА І РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ

Постава оберненої задачі. Розглядаємо два випадки задання вхідних даних для ідентифікації теплофізичних параметрів B та H . У першому випадку задаємо температуру поверхні циліндра $T(r_1, \tau)$, а в другому – поверхневі колкові напруження $\sigma_{\theta\theta}(r_1, \tau)$. Розподіл температури в циліндрі описується рівнянням (1) за умов (2), (3), (4). Напружений стан визначається зі співвідношень (10), які вже задовольняють умови (8)-(9). Однак невідомий один із коефіцієнтів B чи H нестационарної граничної умови (2), яка враховує вплив тонкого приповерхневого шару на нагрів циліндра. Задача з визначення невідомого коефіцієнта граничної умови належить до межових обернених задач. Задання температури поверхні $T(r_1, \tau)$ чи колкових напружень $\sigma_{\theta\theta}(r_1, \tau)$ дають нам умови перевизначення для сформульованої межової оберненої задачі. Використовуватимемо комп'ютерну симуляцію експериментальних вимірювань температури поверхні чи поверхневих колкових напружень в певні дискретні моменти часу. Для цього знаходитимемо розв'язки прямої задачі за відомих теплофізичних параметрів. Імітуючи похибки вимірювань, застосовуватимемо малі випадкові збурення одержаних розв'язків. Досліджуватимемо залежність точності визначення параметрів від проміжків часу, на яких розв'язується обернена задача, від значень самих параметрів, а також стійкість розв'язків оберненої задачі до збурень вхідних даних.

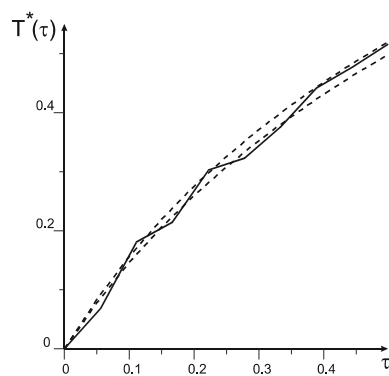


Рис. 2. Вхідні дані для задачі ідентифікації у вигляді збуреної безрозмірної температури поверхні циліндра

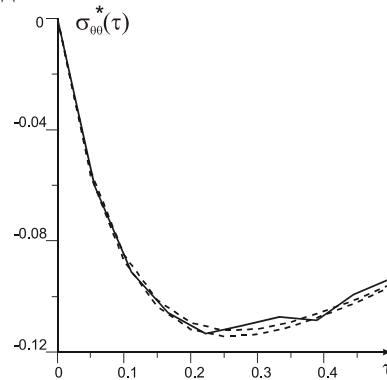


Рис. 3. Вхідні дані для задачі ідентифікації у вигляді збурених безрозмірних поверхневих колкових напружень

Ідентифікація межових теплофізичних параметрів. В інтегро-диференційне рівняння (7) в явному вигляді входять теплофізичні параметри B та H , що дає змогу визначати їх, якщо відомою є температура поверхні циліндра. Крім того, вирази для напружень (10) також залежать від характеристики температури поверхні циліндра $\Phi(\tau)$. Тому, коли дано зміну в часі поверхневих колових напружень, то визначаючи з (10) $\Phi(\tau)$ теж можемо з рівняння (7) знайти B або H . Розглядаємо цих два випадки задання умов перевизначення оберненої задачі і порівнюємо для них точність ідентифікації параметрів. Для симуляції експериментальних вимірювань, розв'язуємо пряму задачу (1)-(4), вважаючи теплофізичні параметри відомими. Знайдені значення безрозмірних температури чи колових напружень у вибраних N часових точках збурюємо випадковими відхиленнями порядку 2% – рис. 2-3. За цими дискретними значеннями температури чи напружень збудовуємо вхідні поля згладжуємо, інтерполюємо кубічними сплайнами і визначаємо з рівняння (7) теплофізичні параметри. Однак задачі ідентифікації є чутливими до збурень вхідних даних. Тому знайдені параметри можуть значно відрізнятися від їх точних значень. Для покращення результату ідентифікації застосовуємо метод перебору.

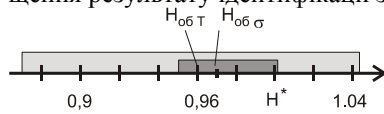


Рис. 4. Інтервали значень параметра H , для яких середнє відхилення температури поверхні чи поверхневих напружень від відповідних згладжених збурених вхідних даних не перевищуватиме 2%

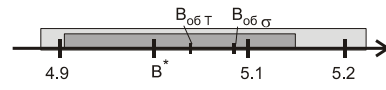


Рис. 5. Інтервали значень параметра B , для яких середнє відхилення тем-ператури поверхні чи поверхневих напружень від відповідних згладжених збурених вхідних даних не перевищуватиме 2%

Задаємо розбиття околу знайдених з інтегро-диференційного рівняння значень параметрів, перебираємо точки, що належать йому, і визначаємо ту, для якої розв'язок прямої задачі мінімально відрізняється від згладжених збурених вхідних даних – точки $H_{об.Т}$ та $H_{об.σ}$, $B_{об.Т}$, $B_{об.σ}$ на рис. 4-5. Водночас визначаємо значення параметрів, для яких відхилення температури поверхні чи колових напружень від точних розв'язків відрізняються не більше ніж на величину збурення – на 2%. Ці значення параметрів утворюють інтервали зображені на рис. 4-5, де визначенню параметра H відповідає рис. 4, а визначенню

B – рис. 5. Точки $H^* = 1$, $B^* = 5$ на рисунках – точні значення параметрів. Світліші інтервали відповідають випадку задання $T(r_1, \tau)$, а темніші - $\sigma_{\theta\theta}(r_1, \tau)$. Для прикладу на рис. 2-3 пунктирними лініями наведено графіки зміни з часом температури поверхні циліндра та поверхневих колових напружень для точок з наведених інтервалів, для яких відхилення відповідних розв’язків прямих задач від згладжених вхідних даних становить 2%. Значення температури чи напружень, обчислені для всіх решти значень параметрів H , що із зазначених того чи іншого інтервалу на рис. 4-5, лежатимуть між двома наведеними пунктирними кривими. Бачимо з рис. 4-5, що у випадку задання $\sigma_{\theta\theta}(r_1, \tau)$, відповідні інтервали значень параметрів є меншими, ніж тоді, коли задається $T(r_1, \tau)$.

Аналізуючи похибку ідентифікації залежно від проміжків часу, на яких вона проводилась, виявляємо, як і очікувалось, що вона є меншою, коли розглядаються середні стадії нагріву циліндра, для яких є визначальним вплив саме граничних умов. Зі збільшенням значень параметра B , точність його визначення зростає, а зі збільшенням H - точність визначення цього параметра навпаки – зменшується.

3. ВИСНОВКИ

Досліджено, що точність ідентифікації найкраща, коли розглядається середня стадія процесу нагріву циліндра. В обох випадках вхідних даних, за їх точного задання, як результат розв’язання оберненої задачі одержуємо точні значення параметрів. У разі неточної інформації про вхідні поля похибка ідентифікації залежить від величини випадкових збурень та від величини параметрів. Для більших значень параметра B точність його ідентифікації є кращою, а для більших значень H – гіршою. Також знайдено інтервали значень параметрів, для яких температура поверхні чи поверхневі напруження, як розв’язки прямої задачі, не виходитимуть за межі наперед заданого діапазону зміни значень. Досліджено, що у випадку задання $\sigma_{\theta\theta}(r_1, \tau)$, відповідні інтервали значень параметрів є меншими, ніж тоді, коли задається $T(r_1, \tau)$, що дає підстави для ствердження про підвищення стійкості ідентифікації теплофізичних параметрів у разі задання умов перевизначення у вигляді поверхневих колових напружень.

Особливістю запропонованого методу є визначення теплофізичних параметрів в режимі „реального часу”. Він може бути поширений на

випадак ідентифікації параметрів багатошарових елементів поліграфічного обладнання [5] за взаємозв'язку фізико-механічних процесів.

1. Алифанов О.М. Обратные задачи как методологическая основа идентификации тепловых математических моделей // 4-й Минский междунар. форум по тепло- и массообмену, Минск 22-26 мая 2000. – Минск, 2000. – 3. – С. 3–13.

2. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир, 1989. – 312 с.

3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие.-К.:Наук.думка, 1986.- 544 с.

4. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Київ: Наук. думка, 1992. – 285 с.

5. Коляно Я.Ю., Сасс Т. Нестационарна задача теплопровідності для двошарової плити щодо сушіння поліграфічної продукції // Комп'ютерні технології друкарства: Зб. наук. праць. – Львів, УАД. – 2009. – Вип. 21. – С. 226-234.

6. Кушнір Р.М., Ясінський А.В. Ідентифікація температурних поля і напружень термочутливого циліндра за поверхневими деформаціями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – № 6. – С. 55–61.

7. Чекурін В.Ф., Процюк Б.В. До ідентифікації параметрів багатошарових покривів за термopужними переміщеннями поверхні нагрівання. // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 1. – С. 7–15.

8. Підстригач Я.С. Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.

9. Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я. Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестационарної граничної умови // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 186 - 194.

10. Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я. Вплив тонких межових неоднорідностей на напружений стан циліндричних тіл за дії термодифузійних процесів // Механ. руйнув. матер. і міцність констр. / Під заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: Фізико-механ. ін-т ім. Г.В. Карпенка НАН України. – 2009. – С.427-432.